JAN KAZIMIERCZAK

Teoria gier w cybernetyce

WIEDZA POWSZECHNA • WARSZAWA 1973

Biblioteka Wiedzy Współczesnej • Omega

251



Okładkę i kartę tytułową
Projektował: Jerzy Kępkiewicz



PRINTED IN POLAND

Państwowe Wydawnictwo „Wiedza Powszechna"
Warszawa 1973

Redaktor: Barbara Nowak

Redaktor techniczny: Janina Szymczak

Korektor: Teresa Olszak

Wydanie I. Nakład 10 000+275 egz.
Ark. wyd. 9,25 Ark. druk. 15,5
Papier ilustr. kl. III, 70 g, 80×100.
Oddano do składania w marcu 1973 r.
Druk ukończono w sierpniu 1973 r.
Zam. 131 M-07 Cena zł 15.—
Drukarnia Techniczna w Bytomiu

Spis treśc

Słowo wstępne

„... teoria gier i cybernetyka stanowią podstawę teorii tego, jak utorować Waszą Własną Drogę"

W. Ross Ashby

Obserwowany w ostatnich latach burzliwy rozwój cybernetyki jako nauki o sterowaniu w ogólności i związanym z nim przetwarzaniu informacji uwypukla znaczenie pewnych gałęzi matematyki współczesnej, przydatnych w procesie syntezy złożonych układów cybernetycznych. Wśród tych gałęzi matematyki na szczególne wyróżnienie zasługuje teoria gier.

Zainteresowanie teorią gier dało się zauważyć już w latach II wojny światowej, jednak praktyczne jej wykorzystanie było wówczas raczej ograniczone i sprowadzało się do analizy gier o małej liczbie strategii. Dopiero pojawienie się elektronicznych maszyn cyfrowych pozwoliło na szersze praktyczne wykorzystanie teorii gier. Maszyna cyfrowa nie tyle stała się podstawowym narzędziem rozwiązywania gier o dużej liczbie strategii, ile raczej wskazywała na możliwość wykorzystania teorii gier jako aparatu formalnego, przydatnego do tworzenia modeli matematycznych dla problemów wymagających rozwiązania przy pomocy maszyny cyfrowej.

Ukazanie się w 1948 r. książki Norberta Wienera *Cybernetyka czyli sterowanie i komunikacja w zwierzęciu i maszynie*, a w ślad za nią wielu innych publi-

kacji z zakresu cybernetyki, w szczególności książki Rossa Ashby'ego *Wstęp do cybernetyki*, zapoczątkowało trwały związek teorii gier z cybernetyką. Okazało się mianowicie, że teoria gier jest bardzo często jedyną i niezastąpioną abstrakcją matematyczną, przydatną w opisie formalnym pewnych zjawisk fizycznych i procesów sterowania, bardzo istotnych z punktu widzenia cybernetyki.

Sposób zachowania się organizmu żywego w obliczu natury jest niczym innym, jak pewną grą dwuosobową z naturą, grą — w której stosowane przez organizm strategie zostały wytyczone w wyniku wielowiekowych doświadczeń, nabytych w procesie obcowania danego gatunku z naturą. Znając dokładnie zachowanie się danego organizmu we wszystkich możliwych okolicznościach, można każdej jego czynności przyporządkować określoną strategię postępowania, właściwą dla aktualnie powstałej sytuacji. Ponieważ na decyzje organizmu wywiera wpływ otoczenie, ogólnie — natura, zadanie uporządkowania tych strategii sprowadza się do sformułowania gry dwuosobowej z naturą. Dysponując analitycznym opisem tej gry można zbudować automat, który — przeznaczony do rozgrywania modelowanej przez siebie gry — reprezentowałby zachowanie się organizmu. Na podstawie wyciągniętych wniosków z modelowania prostych organizmów można przystąpić do modelowania pewnych ograniczonych czynności mózgu ludzkiego.

To z kolei pozwala na budowę samodzielnych układów cybernetycznych — automatów rozgrywających — które w wąskim zakresie przewyższałyby intelekt człowieka i mogłyby zostać wykorzystane do celowego oddziaływania na określone zjawiska fizyczne, a tym samym do optymalnego sterowania przebiegiem interesujących nas procesów.

Powstanie cybernetyki jest wynikiem wymagań współczesnej cywilizacji, a jej dalszy rozwój powoduje, iż automaty rozgrywające będą nabierały coraz większego znaczenia, dlatego też wzrasta potrzeba poważniejszego zajęcia się teorią gier w sencie rozbudowy i uwypuklenia jej dużej przydatności w cybernetyce. Z tych samych względów wynika konieczność popularyzacji teorii gier w aspekcie jej wykorzystania do opisu procesów sterowania, procesów decyzyjnych, zjawisk fizycznych i syntezy układów cybernetycznych.

Potrzebę takiej popularyzacji uzasadnia prawie zupełny brak w Polsce literatury z tego zakresu, zarówno naukowej, jak i popularnonaukowej. Istniejące opracowania z teorii gier, zresztą bardzo nieliczne w języku polskim, dotyczą teorii gier najczęściej jako działu matematyki i abstrahują od jej praktycznego wykorzystania. Ponadto opracowania te są poświęcone w zasadzie grom w postaci normalnej, chociaż wiadomo, że sprowadzenie jakiejkolwiek konkretnej gry, poza najprostszymi, do postaci normalnej jest zamierzeniem przerastającym ludzkie możliwości (por. rozdz. 2).

Pierwotną postacią większości gier jest postać ekstensywna, wielochodowa, i w niej właśnie tkwi bogate źródło abstrakcji przydatnej do formalnego opisu procesów, wymagających sterowania przy pomocy automatów. Biorąc to pod uwagę, przyjąłem za cel książki scharakteryzowanie gier wielochodowych i sposobu ich wykorzystania w rozwiązywaniu problemów wchodzących w zakres cybernetyki. Jednakże, dla umożliwienia Czytelnikowi pełnego wglądu w teorię gier, w książce przedstawiono również krótką charakterystykę gier w postaci normalnej. Pomimo iż książka jest przeznaczona dla szerokiego grona odbiorców, interesujących się współczesną

nauką i techniką, autor ma skrytą nadzieję, że zagadnienia w niej poruszone zainteresują również specjalistów z tych gałęzi wiedzy, których problemy, w ujęciu teorii gier, tu zostały zasygnalizowane.

W zakończeniu niniejszego wstępu pragnę podziękować prof. drowi hab. Juliuszowi Lechowi Kulikowskiemu z Instytutu Cybernetyki Stosowanej PAN za życzliwe ustosunkowanie się do projektu książki, jak również prof. drowi inż. Jerzemu Bromirskiemu z Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej za szereg cennych dyskusji i uwag, dotyczących przedstawionych w książce problemów.

1

Charakterystyka teorii gier

Przedmiot teorii gier

Teoria gier, jedna z gałęzi matematyki współczesnej, jest matematyczną teorią sytuacji konfliktowych. Celem tej teorii jest opracowanie wskazówek dla racjonalnego działania każdej ze stron występujących w sytuacji konfliktowej. Sytuacje konfliktowe są to sytuacje, w których krzyżują się sprzeczne tendencje różnych stron, realizujących różne cele. Przebieg sytuacji konfliktowych zależy od decyzji, podejmowanych przez uczestników konfliktu, przy czym każdy z uczestników dąży do zastosowania takiej decyzji, która przyczyni się do rozwoju sytuacji na jego korzyść.

Sytuacja konfliktowa występuje w różnych dziedzinach życia zarówno w życiu pojedynczego człowieka, jak i w życiu społeczeństw, w egzystencji prostych żywych organizmów i w odwiecznym dążeniu człowieka do rządzenia otaczającym go światem.

Najbardziej zauważalnym, jednoznacznie zdefiniowanym, a przez to klasycznym przykładem konfliktu jest konflikt wojskowy w warunkach walki zbrojnej. Konflikt ten, tak stary jak historia ludzkości, sprowadza się do tego, że interesy militarne dwóch stron uczestniczących w procesie prowadzenia walki zbrojnej są całkowicie ze sobą sprzeczne i każda ze stron dąży do realizowania takich decyzji,

które według subiektywnych przesłanek umożliwią jej uzyskanie sukcesu w postaci zwycięstwa. Innym przykładem bardzo wyraźnych konfliktów są konflikty polityczne, społeczne i ekonomiczne. Natomiast najbardziej trywialnym przykładem są konflikty wynikające z reguł prowadzenia gier towarzyskich, np. gry w szachy, warcaby, pokera itp.

Wielka liczba sytuacji konfliktowych i potrzeba ich analizowania, w celu określenia optymalnej decyzji dla jednej ze stron, przyczyniły się do powstania teorii przydatnej zarówno do formalnego opisu sytuacji konfliktowej, jak i do jej analizy.

Ponieważ zwykła gra towarzyska jest przykładem sytuacji konfliktowej i zawiera wiele składników wspólnych wszystkim konfliktom, teorię tę od słowa „gra" nazwano *teorią gier*. Z tych samych względów w teorii gier wykorzystano terminologię występującą w opisie zwykłych gier. Stąd też strony uczestniczące w danej sytuacji konfliktowej przyjęto nazywać *graczami*, rezultat konfliktu — *wygraną jednego z graczy* lub w szczególnym przypadku *remisem*, natomiast decyzje podejmowane przez uczestników konfliktu przyjęto określać mianem *strategii*.

Wiadomo jednak, że każda sytuacja konfliktowa, wzięta bezpośrednio z praktyki, jest dość złożona, a jej analiza — utrudniona istnieniem licznych czynników ubocznych.

Aby daną sytuację konfliktową można było potraktować jako grę realizowaną przez strony uczestniczące w konflikcie, należy uwolnić się od drugorzędnych ubocznych czynników, a tym samym określić reguły gry. Łączy się to ze szczegółową analizą sytuacji konfliktowej, której wynikiem jest uproszczony, sformalizowany model sytuacji konfliktowej, zasługujący na miano gry.

W każdej grze będącej modelem matematycznym sytuacji konfliktowej uczestniczyć musi co najmniej dwóch graczy, przy czym każdy z graczy musi mieć co najmniej dwie strategie.

Grę z dwoma graczami nazywamy grą dwuosobową, natomiast gdy liczba graczy jest większa od dwóch, mamy do czynienia z grą wieloosobową. Gra prowadzona jest według ściśle określonych reguł; dla gry będącej modelem sytuacji konfliktowej reguły wynikają z praw rządzących daną sytuacją konfliktową. W procesie realizacji gry zgodnie z zadanymi regułami dochodzi się do pewnych wyników końcowych gry. Wynik końcowy gry określa jednoznacznie tzw. wypłatę dla każdego z graczy, a więc jest pewną miarą realizacji celu przez danego gracza.

Można zadać sobie pytanie: jakie korzyści uzyskujemy z modelu matematycznego gry opisującej interesującą nas sytuację konfliktową? Otóż model ten przedstawia pewne zadanie, które należy rozwiązać. Rozwiązując to zadanie, tzn. rozwiązując grę, określimy optymalne strategie postępowania dla każdego z graczy, a tym samym optymalne decyzje postępowania dla stron uczestniczących w danej sytuacji konfliktowej. Wynika z tego olbrzymia korzyść, gdyż istnieją przesłanki wyznaczenia optymalnych dróg postępowania w różnorodnych sytuacjach konfliktowych.

Podsumowując w tym punkcie nasze rozważania możemy stwierdzić, że przedmiotem teorii gier jest budowa i analiza modeli mających postać gier i będących odbiciem określonych zjawisk konfliktowych, występujących w obiektywnej rzeczywistości otaczającej współczesnego człowieka.

Trochę historii

Pojęcie gry jest bardzo stare, niektórzy (Johan Huizinga) twierdzą, że gra jest starsza od kultury. Gry wynalezione przez człowieka i narzucone mu przez naturę były i są w dalszym ciągu obrazem pewnych fikcyjnych sytuacji konfliktowych. Prawdopodobnie niektóre rodzaje gier, np. gra w szachy, zostały stworzone po to tylko, by w wyniku uczestniczenia w nich można było opanować sztukę umiejętnego zachowania się w złożonych sytuacjach konfliktowych.

Brak metod umożliwiających wybór optymalnych decyzji w sytuacjach konfliktowych uzasadniał potrzebę szkolenia umysłów poprzez rozwiązywanie fikcyjnych sytuacji konfliktowych. Szkolenie takie uwarunkowane było również tym, że od najdawniejszych czasów stopień optymalności podejmowanych przez daną osobę decyzji w sytuacji konfliktowej był uzależniony od stopnia doświadczenia tej osoby. Doświadczenie to ugruntowywano przez uczestnictwo w celowo stworzonych fikcyjnych sytuacjach konfliktowych, będących subiektywną kopią obiektywnej rzeczywistości. Przykładem tego są stosowane do dzisiaj we wszystkich armiach świata gry wojenne jako forma szkolenia dowódców i sztabów w podejmowaniu decyzji co do działań bojowych.

Wiadomo jednak, że decyzje podejmowane wyłącznie na podstawie doświadczenia są bardzo często dalekie od optymalnych, czego bogatym źródłem przykładów jest historia wojen. Dlatego też wraz z rozwojem nauki rosła coraz bardziej potrzeba określenia metod naukowej analizy sytuacji konfliktowych.

Pierwsze naukowe podejście do gier jako do sytuacji konfliktowych spotykamy w XVII w. w kores-

pondencji matematyków francuskich Pascala i Fermata oraz w pracach fizyka holenderskiego Huyghensa. Uczeni ci, zajmując się analizą konkretnych gier, nie byli jednak jeszcze w stanie zaproponować graczom żadnej recepty na wygraną. Przekonanie o bezużyteczności zastosowania metod matematycznych do sytuacji z życia codziennego zahamowało na długo rozwój teorii gier, której odrodzenie nastąpiło dopiero w pierwszej połowie XX w. Matematyka nagromadziła bowiem wtedy cały arsenał środków i metod badawczych, które można było wykorzystać do stworzenia aparatu formalnego tej teorii.

Pierwsze poważniejsze koncepcje związane z teorią gier występują w pewnych pracach francuskiego matematyka E. Borela z 1921 r., jak również w późniejszych, zwłaszcza w pracy opublikowanej w 1927 r., w której Borel sformułował twierdzenie o „minimaksie", lecz nie udowodnił go.

Polskiego czytelnika szczególnie zainteresować powinien fakt, że pierwsza polska praca z teorii gier ukazała już się w 1925 r. Był nią artykuł polskiego matematyka H. Steinhausa pt. „Definicje potrzebne do teorii gier i pościgu", opublikowany we Lwowie w „Myśli Akademickiej".

Jednakże za głównego twórcę teorii gier uważa się powszechnie wybitnego amerykańskiego matematyka, Johna von Neumanna*, który w swej publikacji z 1928 r. sprecyzował podstawowe pojęcia teorii gier i udowodnił fundamentalne twierdzenie tej teorii, tzw. twierdzenie o „minimaksie".

---

* John von Neumann (1903—1957) — jeden z największych matematyków XX w. Urodził się w Budapeszcie i w tamtejszym uniwersytecie mając 23 lata uzyskał stopień doktora nauk matematycznych. W 1927 r. został docentem uniwersytetu w Berlinie, a w 1929 r. — w Hamburgu. W 1930 r. wyjechał do Stanów Zjednoczonych, gdzie znalazł się w gronie

Wszystkie wymienione prace, łącznie z pracą von Neumanna z 1928 r., nie zwróciły na siebie niczyjej uwagi. Były to prace zbyt specjalistyczne, przeznaczone dla matematyków, a nie dla przedstawicieli tych nauk, w których pojęcie konfliktu odgrywa ważną rolę. Dopiero ukazanie się w 1944 r. książki napisanej przez von Neumanna i amerykańskiego ekonomistę Morgensterna wzbudziło wielkie zainteresowanie teorią gier. Książka ta, nosząca tytuł *Theory of Games and Economic Behavior* (Teoria gier i postępowania ekonomicznego), stała się po prostu klasycznym dziełem tej teorii, na którym opiera się większość współczesnych badań z zakresu teorii gier. Począwszy od 1944 r. na świecie ukazało się dużo publikacji poświęconych teorii gier, jednakże jeszcze zbyt mało, aby ją dostatecznie spopularyzować. Ten brak szerszej popularyzacji teorii gier niewątpliwie jest przyczyną zbyt powolnego jej rozwoju. Bardzo często, wyłącznie wskutek niedostatecznej wiedzy, w praktycznych zastosowaniach odrzuca się idee teorii gier, mimo ich niezaprzeczalnie wielkiej przydatności do tych zastosowań.

---

pracowników naukowych uniwersytetu w Princeton. W 1931 r. otrzymał tytuł profesora. Od 1933 r. aż do końca swego życia był profesorem matematyki w zakładzie studiów podyplomowych uniwersytetu w Princeton. Od 1955 r. członek Komisji do Spraw Energii Atomowej Stanów Zjednoczonych.

Wśród jego wielu osiągnięć naukowych na szczególną uwagę zasługują prace z zakresu mechaniki kwantowej, teorii automatów, projektowania maszyn matematycznych i z teorii gier. Przy wykorzystaniu koncepcji von Neumanna dotyczącej struktury logicznej maszyn matematycznych budowane są współczesne komputery. Opracowany przez niego w 1945 r. projekt maszyny cyfrowej, nazwanej EDVAC, jest kamieniem węgielnym rozwoju współczesnej techniki i nauki, w których komputery odgrywają coraz ważniejszą rolę.

Pojęcia podstawowe i podział gier

Gra jest modelem abstrakcyjnym pewnej sytuacji konfliktowej i jest prowadzona według ściśle określonych reguł. W ogólnym przypadku w grze może uczestniczyć kilku uczestników, których interesy są sprzeczne. Rozważania nasze zawęzimy do rozpatrywania głównie gier dwuosobowych, gdyż gra dwuosobowa jest najprostszym i najczęściej spotykanym modelem sytuacji konfliktowej. W celu naświetlenia podstawowych pojęć występujących w teorii gier przyjmiemy, że grę prowadzi dwóch graczy, których oznaczymy symbolami *A* i *B*. Gra ta jest pewnym przedsięwzięciem, składającym się z kilku poczynań graczy *A* i *B*, którzy realizując to przedsięwzięcie dążą do przeciwnych celów. Poczynania graczy są określone regułami gry. Przez reguły gry rozumiemy zbiór umów, które określają sposób postępowania graczy, zakres wiadomości każdego z nich o postępowaniu przeciwnika, sposób określenia wyników gry itp. W ujęciu abstrakcyjnym gra jest niczym innym, jak zbiorem opisujących ją reguł. Zwykle istnieje kilka możliwych wariantów rozegrania danej gry. Każdy konkretny przykład rozegrania danej gry, według dopuszczonego regułami gry wariantu, nosi nazwę partii.

Elementami składowymi gry są ruchy, gra jest po prostu ciągiem ruchów wykonywanych przez graczy w określonej kolejności. Ruch dotyczy pewnego etapu w procesie realizacji gry.

Na danym etapie gry każdy z graczy wybiera ze zbioru dopuszczalnych dla siebie działań tylko jedno działanie. To wybrane działanie nosi nazwę wyboru.

Załóżmy, że w pewnej grze w karty gracz *A*, na którego przypada ruch, dysponuje talią składającą się z ośmiu kart; wówczas możemy powiedzieć, że

ruch gracza A obejmuje osiem możliwych wyborów. Wyjście przez gracza A konkretną kartą będzie wyborem. Ruch kryje więc w sobie zbiór alternatyw, a wybór określa jedną tylko, wybraną w danym momencie konkretną alternatywę. Pojęcie „ruch" pozostaje w takim stosunku do pojęcia „wybór", jak gra w stosunku do partii gry. Stąd też mówimy, że gra jest ciągiem ruchów, a partia gry — ciągiem wyborów.

Pojęciem nie mniej ważnym niż ruch i wybór jest w teorii gier pojęcie strategii. Strategią nazywa się zbiór reguł, jednoznacznie określających wybór działania danego gracza w każdym ruchu w zależności od sytuacji, jaka może powstać w procesie prowadzenia gry. Aby określić strategię dla danego gracza, należy rozpatrzyć wszystkie możliwe do powstania sytuacje w grze i każdej sytuacji, i to w każdym ruchu, przyporządkować odpowiedni wybór działania. Po wybraniu strategii gracz może już w grze nie uczestniczyć, lecz podać spis reguł postępowania, opisujących wybraną strategię, innej osobie, która go będzie reprezentowała w danej grze. W szczególnym przypadku gracza może zastąpić automat działający zgodnie z zadaną mu strategią.

Zajmijmy się teraz pewną klasyfikacją gier, pozostawiając w mocy założenie, że interesują nas wyłącznie gry dwuosobowe. Kryteria podziału gier są bardzo różnorodne, np. może być przeprowadzony podział gier ze względu na sposób określania wyników gry.

W grze dwuosobowej wynik gry może oznaczać wygraną gracza A, wygraną gracza B lub remis. Zwykle wynik gry wyraża się ilościowo liczbami. Na przykład liczba ze znakiem „plus" może oznaczać liczbę punktów wygranych przez gracza A, natomiast liczba ze znakiem „minus" może oznaczać

liczbę punktów przegranych przez gracza *A*, a wygranych przez gracza *B*. W takim ujęciu zero oznaczałoby remis w grze. Gra, w której jeden gracz wygrywa to, co drugi przegrywa, nazywa się grą z sumą zerową, gdyż w grze tej suma wygranych obu stron równa jest zeru. W grze z sumą zerową interesy obu graczy są wyraźnie sprzeczne.

Przeciwstawnym typem gry jest gra o sumie niezerowej, zwana często grą nieściśle konkurencyjną. W grze tej liczba punktów wygranych przez gracza *A* nie równa się liczbie punktów przegranych przez gracza *B*. W grze o sumie niezerowej istnieją różniące się kryteria oceny wyników gry dla poszczególnych graczy.

Biorąc pod uwagę charakter i ilość informacji będących w dyspozycji graczy, a dotyczących procesu realizacji gry, gry dzielimy na gry z pełną informacją i gry z niepełną informacją. Gry z pełną informacją, nazywane również grami o kompletnej informacji, charakteryzują się tym, że każdy z graczy zna przy każdym ruchu sytuację powstałą w grze oraz wyniki wszystkich poprzednich ruchów zarówno własnych, jak i swego przeciwnika. Przykładem gier z pełną informacją są szachy, warcaby, gra w kółko i krzyżyk. Większość gier mających praktyczne znaczenie należy do gier z niepełną informacją. Brak pełnej informacji w grze może się objawiać różnorodnie, np. gracz *A* wykonując ruch nie zna poprzedzającego ten ruch wyboru gracza *B*, a tym samym nie zna sytuacji powstałej w grze. Przykładem gier z niepełną informacją są gra w domino, gry w karty oraz gry wojenne opisujące sytuacje bojowe na polu walki.

W zależności od liczby możliwych strategii, gry dzielą się na skończone i nieskończone. Grą skończoną nazywamy grę, w której każdy gracz ma tylko skończoną liczbę strategii. Natomiast gra nieskoń-

czona jest to taka gra, w której co najmniej jedna ze stron ma nieskończenie wiele strategii.

Gry dwuosobowe, z punktu widzenia jednego z graczy uwzględniającego osobowość gracza drugiego, możemy podzielić na gry z rozumnym przeciwnikiem i gry z naturą. Gry z naturą charakteryzują się tym, że natura jako druga strona gry nie jest zainteresowana końcowym wynikiem gry, a wykonywane przez nią ruchy mają charakter losowy.

Pojęcie gry z naturą, często nazywanej grą przeciw naturze, jest bardzo pomocne przy formowaniu modeli matematycznych opisujących procesy sterowania, a więc gra ta zajmuje szczególną pozycję w cybernetyce.

Ze względu na charakter prowadzenia gier oraz postać opisującego je modelu matematycznego, gry dzielimy na gry w postaci normalnej i gry w postaci ekstensywnej, występujące bardzo często pod nazwą gier wielochodowych. Podział ten jest chyba najistotniejszym podziałem w teorii gier, gdyż uwypukla w niej dwa podstawowe i różniące się między sobą sposoby podejścia do pojęcia gry i jej przedstawienia. Gra w postaci normalnej reprezentuje pewien proces statyczny, jednorazowy i niezmienny w czasie, natomiast gra w postaci ekstensywnej reprezentuje pewien proces dynamiczny, a więc zmieniający się w czasie. W grze w postaci normalnej każdy z graczy dysponuje zbiorem przyporządkowanych mu strategii. Realizacja gry w postaci normalnej sprowadza się do tego, że obaj gracze dokonują jednocześnie wyboru po jednej ze swoich strategii, przy czym żaden z graczy nie zna wyboru strategii swego przeciwnika. Wybór strategii przez graczy jest jednocześnie początkiem i końcem danej partii gry i jednoznacznie określa jej wynik. Postać normalna konkretnej gry jest uogólnionym modelem

tej gry, umożliwiającym jej analizę celem określenia optymalnych strategii graczy, natomiast nie wnika w proces prowadzenia gry.

W odróżnieniu od gry w postaci normalnej, będącej procesem jednoetapowym, gra w postaci ekstensywnej jest wieloetapowym procesem prowadzenia gry, a więc reprezentuje grę wielochodową.

Gra wielochodowa przebiega w funkcji czasu i jest ciągiem ruchów wykonywanych przez graczy w określonej kolejności — na przemian i nie jednocześnie (np. gra w szachy). W grze wielochodowej podstawowym elementem procesu realizacji gry jest ruch i dokonywany w nim wybór, natomiast w grze przedstawionej w postaci normalnej zasadniczą rolę odgrywa wybór strategii.

Gry w postaci normalnej i gry w postaci ekstensywnej omówione zostaną szerzej w następnych rozdziałach niniejszej książki.

2

Gry w postaci normalnej

Model matematyczny gry dwuosobowej

Główną i podstawową rolę w teorii gier spełniają gry dwuosobowe, gdyż większość sytuacji konfliktowych można sprowadzić do konfliktu dwóch stron. Spośród wymienionych we wstępie rodzajów gier dwuosobowych, najprostszym i jednocześnie najdokładniej opracowanym modelem gry dwuosobowej jest gra dwuosobowa o sumie zerowej. A oto krótka charakterystyka tej gry. Z grą dwuosobową o sumie zerowej mamy do czynienia wtedy, gdy w sytuacji konfliktowej opisanej modelem gry występują dwie strony, przy czym interesy stron są przeciwstawne, a wygrana jednej ze stron równa się przegranej drugiej. Strony gry nazywać będziemy po prostu graczami. Najwygodniejszym do analizy modelem matematycznym tej gry jest jej postać normalna. Zgodnie z definicją postaci normalnej gry, w procesie realizacji takiej gry każdy z graczy wybiera jedną z możliwych dla siebie strategii, przy czym wybór ten gracze przeprowadzają równocześnie. Przez określenie dla obu graczy A i B wszystkich możliwych dla nich strategii uzyskamy dwa zbiory: zbiór strategii gracza A i zbiór strategii gracza B. Zbiory te oznaczymy następująco

dla gracza A

$$Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_i, ..., Y_m\}$$

dla gracza B

$$Z = \{Z_1, Z_2 ..., Z_j, ..., Z_n\}$$

Element Y_i zbioru Y jest i-tą strategią gracza A, zaś element Z_j zbioru Z jest j-tą strategią gracza B. W ogólnym przypadku liczba strategii gracza A może się znacznie różnić od liczby strategii gracza B, stąd też $m \neq n$. Pojedyncze strategie zbioru Y i Z będziemy umownie nazywać strategiami czystymi, w odróżnieniu od tzw. strategii mieszanych, które zdefiniowane zostaną później. Każdej parze strategii czystych, wybranych przez graczy, odpowiada określony wynik gry. Na przykład, gdy gracz A wybrał strategię Y_i, a gracz B wybrał strategię Z_j, to jednoznacznie zostanie określony wynik gry, oznaczony umownie symbolem a_{ij}. Wynik ten, nazywany bardzo często wypłatą, może mieć wiele interpretacji. Może mianowicie wskazywać, ile jednostek pieniężnych gracz B płaci graczowi A (lub odwrotnie), może wskazywać na prawdopodobieństwo realizacji pewnego przedsięwzięcia przez któregoś z graczy lub po prostu może tylko wskazywać na umowną wielkość wygranej (lub przegranej) przez danego gracza. Zwykle wynik gry określa się z punktu widzenia interesów jednego z graczy, np. gracza A, więc liczba dodatnia wskazywać może na stopień wygranej gracza A, a liczba ujemna na stopień wygranej gracza B. Stąd też wypłata $a_{ij} = 5$ będzie oznaczała, że gracz A wygrywa 5 umownych jednostek, zaś gracz B przegrywa 5 jednostek; odwrotna sytuacja powstanie wówczas, gdy $a_{ij} = -5$.

Wartość wypłaty zależy od wybranych przez graczy strategii. Aby ułatwić sobie analizę gry, wyniki gry

zestawiamy w specjalnej tablicy prostokątnej, umownie nazwanej macierzą gry lub macierzą wypłat.

W ogólnym ujęciu pod terminem „macierz" rozumie się zbiór liczb zapisanych w postaci prostokątnej tablicy o m wierszach i n kolumnach. Tablicę oznaczającą macierz ujmuje się w nawiasy kwadratowe tak, jak to przedstawiono poniżej

$$\begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \; a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Liczby a_{ij} umieszczone w macierzy nazywamy elementami macierzy, przy czym pierwszy wskaźnik elementu a_{ij} oznacza numer wiersza, drugi — numer kolumny. Symbol a_{ij} umownie nazywa się elementem ogólnym macierzy, gdyż w zależności od wartości wskaźników i, j określa on ten lub inny element macierzy. Gdy macierz składa się z m wierszy i n kolumn, wówczas mówi się, że jest to macierz wymiaru $m \times n$ lub typu $m \times n$, przy czym gdy $m \neq n$, to macierz jest prostokątna, natomiast dla $m = n$ macierz jest kwadratowa. Macierz gry różni się tym od macierzy przedstawionej w ujęciu ogólnym, że jej wiersze i kolumny oznacza się dodatkowo symbolami, będącymi nazwami strategii graczy.

Macierz gry możemy przedstawić symbolicznie w następujący sposób

B / A	Z_1	Z_2	...	Z_j	...	Z_n
Y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
Y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
Y_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
Y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Wiersze macierzy gry są opisane strategiami gracza A, a kolumny — strategiami gracza B. Dowolny współczynnik a_{ij} zapisany w klatce powstałej z przecięcia i-tego wiersza i j-tej kolumny wskazuje na wielkość wypłaty, jaką uzyska gracz A w przypadku, gdy zastosuje strategię Y_i, a gracz B — strategię Z_j. Gra wyrażona przy pomocy macierzy gry, w której znajduje się m wierszy i n kolumn, nazywa się grą typu $m \times n$. Gra taka jest grą skończoną, gdyż każdy z graczy ma skończoną liczbę strategii. Dla ilustracji sposobu zapisu gry w postaci macierzy rozpatrzymy prosty przykład gry.

Przykład 1

Dwaj gracze A i B równocześnie i niezależnie od siebie zapisują każdy jedną z trzech liczb: 1, 2 lub 3.

Jeżeli suma napisanych liczb jest parzysta, to gracz B płaci graczowi A tę sumę w złotówkach, jeśli suma jest nieparzysta, to na odwrót, gracz A płaci ją graczowi B.

Powyższą grę należy przeanalizować i utworzyć macierz gry. Ze słownego opisu gry wynika, że każdy z graczy ma trzy strategie. Dla gracza A strategie te przedstawiają się następująco:

Y_1 — napisać 1, Y_2 — napisać 2, Y_3 — napisać 3.

Podobnie dla gracza B mamy strategie:

Z_1 — napisać 1, Z_2 — napisać 2, Z_3 — napisać 3.

Gra jest grą typu 3×3, a jej macierz przedstawia się następująco

A \ B	Z_1	Z_2	Z_3
Y_1	2	−3	4
Y_2	−3	4	−5
Y_3	4	−5	6

Rozpatrzmy tę grę z punktu widzenia gracza A. Gdyby gracz A wiedział, jaką strategię czystą zastosuje gracz B, nie miałby żadnych trudności ze znalezieniem swojej najlepszej strategii czystej. Jeżeli np. wyborem gracza B byłaby strategia Z_1, to gracz A zastosowałby strategię Y_3, gdyż wówczas

wygrywa 4 złote, stosując natomiast strategię Y_1 gracz *A* wygrałby tylko 2 złote, a stosując strategię Y_2 przegrałby 3 złote.

Korzystając z macierzy gry można określić w analogiczny sposób najlepsze strategie gracza *A* dla pozostałych dwóch strategii gracza *B*, tj. strategii Z_2 i Z_3, oczywiście przy założeniu, że gracz *A* jest wcześniej poinformowany o wyborze gracza *B*. Ponieważ jednak obaj gracze dokonują wyboru jednocześnie i gracz *A* nie jest informowany o zamiarze swego przeciwnika, określenie optymalnego postępowania gracza *A* w grze jest zadaniem niełatwym.

W podobny sposób możemy przeanalizować grę z punktu widzenia gracza *B*, dochodząc do tego samego wniosku, że określenie optymalnego postępowania gracza *B* jest również zadaniem niełatwym. Zadanie to jest rozwiązywalne, jednakże aby je rozwiązać, musimy znać dostatecznie dobrze teorię gier.

Podana w przykładzie gra przedstawia pewną sytuację konfliktową, a wiemy, iż celem teorii gier jest nic innego, jak tylko opracowanie wskazówek dotyczących rozumnego zachowania się graczy w sytuacjach konfliktowych. Rozumne postępowanie graczy oznacza, że graczom nie wolno ryzykować. Teoria gier nie uznaje ryzyka, przy czym analizując daną grę z punktu widzenia jednego z graczy zawsze zakłada się, że przeciwnik jest nie mniej rozumny i będzie robił wszystko, aby uzyskać jak największą wygraną dla siebie. Określenie dla każdego z graczy optymalnego, rozumnego postępowania w danej grze sprowadza się do wyznaczenia każdemu z nich s t r a t e g i i o p t y m a l n e j. Strategią optymalną gracza nazywa się taką strategię, która przy wielokrotnym powtarzaniu gry zapewnia danemu gra-

czowi możliwie maksymalną średnią wygraną. Optymalne strategie graczy można określić na podstawie wyników analizy macierzy gry.

Dla przykładu rozpatrzmy bardzo prostą macierz gry

B / *A*	Z_1	Z_2
Y_1	-2	1
Y_2	1	2

Ponieważ zgodnie z przyjętym założeniem zawarte w macierzy gry wypłaty dotyczą tylko jednego gracza, a mianowicie gracza A, można przyjąć, że gracz A będzie starał się wybrać taką strategię ze zbioru $\{Y_1, Y_2\}$, która mu zapewni maksymalną wygraną, natomiast gracz B będzie starał się wybrać taką strategię ze zbioru $\{Z_1, Z_2\}$, aby wygrana gracza A była minimalna. W tym też celu obaj gracze przeprowadzą analizę macierzy gry, rozpatrując kolejno swoje strategie. Gracz A rozpatrując swoją strategię Y_1 musi się liczyć z tym, że jego przeciwnik może zastosować strategię najmniej korzystną dla gracza A, a mianowicie strategię Z_1. Zgodnie z takim rozumowaniem strategia Y_1 przedstawia dla gracza A wartość -2, przy czym wartość ta wskazuje na tzw. poziom bezpieczeństwa przy wyborze przez gracza A strategii Y_1.

Przystępując do badania strategii Y_2, gracz A łatwo stwierdzi, że stosując tę strategię będzie miał zapewnioną wygraną równą 1. Strategia Y_2 maksy-

malizuje więc poziom bezpieczeństwa gracza A, gdyż zapewnia mu wygraną co najmniej równą 1, natomiast strategia Y_1 nie zapewnia mu takiej wygranej. Ponieważ w rozpatrywanej grze wielkość 1 jest największą wygraną, jaką może sobie zagwarantować gracz A, wielkość tę nazwiemy dolną wartością gry. Dolną wartość gry oznaczać będziemy symbolem α, w naszym przypadku $\alpha = 1 = a_{21}$.

Analizując z kolei przedstawioną macierz z punktu widzenia gracza B stwierdzimy, że dla strategii Z_1 poziom bezpieczeństwa wynosi 1, zaś dla strategii Z_2 wynosi on 2. Strategia Z_1 maksymalizuje więc poziom bezpieczeństwa gracza B, gdyż stosując strategię Z_1 gracz B może przegrać co najwyżej 1. Wielkość 1 jest w tym przypadku górną wartością gry, oznaczywszy ją symbolem β możemy zapisać $\beta = 1 = a_{21}$. Z przeprowadzonej analizy wynika więc, że $\alpha = \beta = 1 = a_{21}$.

Gdy dolna i górna wartość gry są sobie równe, można bardzo łatwo wyznaczyć optymalne strategie czyste graczy. Są nimi te strategie, które maksymalizują poziomy bezpieczeństwa graczy. Stąd też dla rozpatrywanej macierzy gry optymalną strategią czystą gracza A jest Y_2, a gracza B — strategia Z_1.

Zwykle w celu określenia dolnej i górnej wartości gry posługujemy się metodą bardziej sformalizowaną, niż to wynika z przeprowadzonej wyżej analizy. Dla scharakteryzowania tej metody posłużymy się macierzą gry w postaci ogólnej, z tym że macierz tę uzupełnimy o dodatkową kolumnę oznaczoną symbolem α^* i dodatkowy wiersz oznaczony symbolem β^*.

Macierz ta przedstawia się następująco

B / A	Z_1	Z_2	...	Z_j	...	Z_n	α^*
Y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	α_1
Y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	α_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	α_m
β^*	β_1	β_2	...	β_j	...	β_n	

W celu określenia dolnej wartości gry z każdego wiersza macierzy wybieramy element o najmniejszej wartości i zapisujemy go z prawej strony danego wiersza w kolumnie α^*. Wybrany z i-tego wiersza element o najmniejszej wartości oznaczamy symbolem α_i, a sam proces wyboru zapiszemy symbolicznie następująco

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

Zapis $\min_j$ (minimum po j) rozumiemy w ten sposób, że dla $i = \text{const}$ oraz $j = 1, 2, ..., n$ wybieramy element a_{ij} o najmniejszej wartości. Z kolei po zapełnieniu kolumny α^* wybieramy spośród wszystkich

elementów α_i element o wartości największej, który jest dolną granicą gry. Wybór ten zapiszemy następująco

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

Po wyznaczeniu dolnej wartości gry przystępujemy do określenia górnej wartości gry. W tym celu z każdej kolumny wybieramy element o największej wartości i zapisujemy go u dołu danej kolumny w wierszu β^*. Dla j-tej kolumny element o największej wartości oznaczymy symbolem β_j, a sam proces wyboru zapiszemy następująco

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

tzn. przyjmując $j = \text{const}$ i zmieniając kolejno numery wierszy od $i = 1$ do $i = m$ wybieramy element a_{ij} o największej wartości. Z kolei po zapełnieniu wiersza β^* wybieramy spośród wszystkich wielkości β_j (dla $j = 1, 2, ..., n$) element o najmniejszej wartości, będący górną wartością gry. Wybór ten zapisujemy symbolicznie jako

$$\beta = \min_j \beta_j$$

Dla przykładu wyznaczmy dolną i górną wartość gry dla macierzy przedstawionej poniżej

B / A	Z_1	Z_2	Z_3	α^*
Y_1	4	1	3	(1)
Y_2	−3	0	4	−3
Y_3	3	−1	0	−1
β^*	4	(1)	4	

Dla macierzy tej dolna i górna wartość gry są sobie równe i wynoszą $\alpha = 1$ i $\beta = 1$. Jeśli dolna wartość gry równa się górnej, to ich wspólną wartość będziemy nazywać **wartością gry** i oznaczać symbolem v. Ponieważ dla rozpatrywanej macierzy gry spełniona jest równość $\alpha = v = \beta$, rozwiązanie gry jest bardzo proste. Wiersz macierzy, któremu przyporządkowana jest dolna wartość gry, określa optymalną strategię czystą gracza A — strategią tą jest Y_1. Podobnie kolumna, której przyporządkowana jest górna wartość gry, określa optymalną strategię czystą gracza B — strategią tą jest Z_2.

W większości przypadków dolna i górna wartość gry nie są sobie równe. Na przykład określając dolną i górną wartość gry dla macierzy z przykładu 1 stwierdzimy, że $\alpha = -3$ oraz $\beta = 4$. W związku z tym, że $\alpha \neq \beta$, gry takiej nie możemy rozwiązać przez określenie optymalnych strategii czystych graczy, lecz przez określenie **optymalnych strategii mieszanych**, które zdefiniujemy trochę dalej.

Gry zamknięte

W zależności od tego czy dolna wartość gry równa się górnej wartości, czy też wielkości te nie są sobie równe, dwuosobowe gry o sumie zerowej możemy podzielić na gry zamknięte i gry otwarte. Z grą zamkniętą mamy do czynienia wtedy, gdy zachodzi równość $\alpha = v = \beta$. Natomiast w przypadku, gdy dla danej gry spełniona jest nierówność $\alpha \neq \beta$, grę taką nazwiemy grą otwartą. Najpierw rozpatrzymy gry zamknięte. Gry zamknięte występują często pod nazwą gier zawierających pary strategii w równowadze, przy czym każda taka gra charak-

teryzuje się tym, że w jej macierzy można wyróżnić tzw. punkt siodłowy. Punkt siodłowy jest takim elementem a_{ij} macierzy gry, który, będąc najmniejszym w danym wierszu i jednocześnie największym w danej kolumnie, określa sobą wartość gry v oraz dolną i górną wartość gry. W punkcie siodłowym przecinają się optymalne strategie czyste graczy, co łatwo stwierdzić wracając do przykładów omówionych w poprzednim punkcie.

Rozpatrzmy teraz bardziej konkretny przykład gry zamkniętej, który posłuży nam do przedstawienia właściwości tego typu gry.

Przykład 2

Wojska czerwonych i niebieskich znajdują się w konflikcie zbrojnym. Wojska niebieskich, będące stroną B gry, przystępując do jednej z kolejnych operacji bojowych planują wykonać uderzenie na obronę wojsk czerwonych w jednym z czterech możliwych kierunków Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Wojska czerwonych, będące stroną A gry, licząc się z uderzeniem nieprzyjaciela na broniony przez siebie rejon, postanowiły tak rozmieścić swoje środki ogniowe, by zadać nieprzyjacielowi maksymalne straty bez względu na to, z jakiego on będzie nacierał kierunku. W tym też celu dowództwo bronionego rejonu opracowało cztery możliwe warianty rozmieszczenia środków ogniowych Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 oraz przyjęło, że stopień obezwładnienia nacierającej strony B zależy od przyjętego przez nią kierunku natarcia i od przyjętego wariantu rozmieszczenia środków ogniowych obrony. Z opisu powyższej sytuacji b jowej wynika, że przedsięwzięcia strony A i r źródłem konfliktu, w którym strona B dąży dr jęcia takiego kierunku natarcia, by mieć

mniejsze straty, a strona *A* zainteresowana jest w przyjęciu takiego wariantu działania, by zadać nacierającemu jak największe straty. Matematyczny model tego konfliktu można opisać macierzą gry, której elementy a_{ij}, określane przez stronę *A*, przedstawiają stopień obezwładnienia nacierającego przeciwnika *B*. Macierz tej gry przedstawia się następująco

B / *A*	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	α^*
Y_1	0,5	0,6	0,9	0,4	0,4
Y_2	0,9	0,5	0,4	0,8	0,4
Y_3	0,8	(0,7)	0,9	0,9	(0,7)
Y_4	0,8	0,3	0,5	0,7	0,3
β^*	0,9	(0,7)	0,9	0,9	

Określając na podstawie tej macierzy dolną i górną wartość gry łatwo jest stwierdzić, że $\alpha = 0,7$ oraz $\beta = 0,7$ umownych jednostek. Ponieważ dolna i górna wartość gry są sobie równe, rozpatrywana gra ma punkt siodłowy. Tym punktem siodłowym jest element macierzy $a_{32} = 0,7$, leżący na przecięciu wiersza Y_3 i kolumny Z_2. Punkt siodłowy jednoznacznie określa optymalną strategię czystą strony *A* i *B*. Stąd też strategia Y_3 jest optymalną strategią czystą strony *A*, natomiast strategia Z_2 jest optymalną strategią czystą strony *B*.

Z analizy wartości elementów w kolumnie Z_2 i wierszu Y_3 przedstawionej macierzy gry wynika, że jakiekolwiek odstępstwo nacierającego od jego optymalnej strategii Z_2, przy nie zmienionej strategii optymalnej strony *A*, przynosi mu większe straty. Podobnie odstępstwo strony *A* od optymalnej stratetegii Y_3, przy nie zmienionej strategii strony *B*, zmniejsza straty nacierającego. Jeśli natomiast obie strony zastosują swoje optymalne strategie czyste, to wygrana strony *A* jest równa wartości gry $v = 0{,}7$, tzn. stopień obezwładnienia strony *B* będzie wynosił 0,7 umownych jednostek.

W dowolnej dwuosobowej grze zamkniętej optymalną strategię czystą gracza *A* nazywamy s t r a t e g i ą m a k s y m i n i m a l n ą, natomiast optymalną strategię czystą gracza *B* nazywamy s t r a t e g i ą m i n i m a k s y m a l n ą. Jeśli w grze zamkniętej gracz *A* stosuje strategię maksyminimalną, to przy jakimkolwiek poczynaniu swego przeciwnika ma zagwarantowaną wygraną nie mniejszą niż dolna wartość gry α. Podobnie jeżeli w grze zamkniętej gracz *B* stosuje strategię minimaksymalną, to przy jakimkolwiek poczynaniu gracza *A* nie przegrywa on więcej niż wynosi górna wartość gry β, ewentualnie nie wygrywa mniej niż β. Rozwiązanie gry zamkniętej jest bardzo proste, gdyż sprowadza się do określenia wartości gry $\alpha = v = \beta$ oraz do określenia strategii maksyminimalnej dla gracza *A* i strategii minimaksymalnej dla gracza *B*.

Gry otwarte

W praktyce bardzo rzadko spotykamy się z grami zamkniętymi, które z teoretycznego punktu widzenia są mało ciekawe, gdyż ich rozwiązanie jest trywialne.

Można powiedzieć, że gry zamknięte są szczególnym przypadkiem gier dwuosobowych o sumie zerowej. Najczęściej mamy do czynienia z grami otwartymi, tzn. z takimi dwuosobowymi grami o sumie zerowej, które nie mają punktu siodłowego w obszarze strategii czystych. W grze otwartej dolna wartość gry α nie równa się górnej wartości gry β, a więc istnieje nierówność $\alpha \neq \beta$ oraz spełniona jest relacja $\alpha \leqslant v \leqslant \beta$.
Dla przykładu rozpatrzmy następującą macierz gry:

B / A	Z_1	Z_2	α^*
Y_1	1	4	1
Y_2	3	2	2
β^*	3	4	

Dla macierzy tej dolna wartość gry wynosi 2, a górna wartość gry wynosi 3. Gra opisana taką macierzą jest grą otwartą, gdyż $\alpha \neq \beta$, a więc brak w niej punktu siodłowego. Różnicę $\beta - \alpha$ nazywamy zwykle rozwartością gry otwartej. W rozwartości gry otwartej kryją się dodatkowe szanse podwyższenia wygranej dla każdego z graczy.

Analizując naszą macierz gry zwróćmy uwagę, że gracz A stosując swoją maksyminimalną strategię Y_2 gwarantuje sobie przy dowolnym postępowaniu swego przeciwnika wygraną równą co najmniej dolnej wartości gry $\alpha = 2$. Podobnie gracz B stosując swoją

minimaksymalną strategię Z_1 nie będzie przegrywał więcej niż wynosi górna wartość gry $\beta = 3$. Jeśli w grze gracz A uparcie będzie powtarzał swoją strategię Y_2, to gracz B natychmiast się zorientuje, że stosując swoją strategię Z_1 popełnia błąd, gdyż w każdej partii przegrywa 3 punkty, natomiast stosując Z_2 przegrywałby tylko 2 punkty. Po dojściu do takiego wniosku gracz B zacznie stosować w grze swoją strategię czystą Z_2. Jednakże co najmniej po dwóch partiach gracz A zorientuje się o zmianie dokonanej w postępowaniu gracza B i stwierdzi, że dotychczas stosowana przez niego strategia Y_2 przynosi mu wygraną tylko 2 punkty, natomiast stosując strategię Y_1 mógłby w każdej partii wygrywać aż 4 punkty. Z kolei więc gracz A zmieni swoją strategię czystą Y_2 na strategię czystą Y_1. Dalej proces przebiegać będzie analogicznie.

Z powyższego więc wynika, że gracze w trakcie realizacji gry będą zmieniać swoje strategie czyste w celu uzyskania większej wygranej. Gracz A będzie dążył do uzyskania średniej wygranej większej niż α, natomiast gracz B będzie dążył do obniżenia średniej przegranej poniżej wartości β.

W ogólnym przypadku dla dowolnej gry otwartej, każdy z graczy chcąc podwyższyć swoją wygraną powinien stosować nie jedną strategię czystą, lecz pewną strategię kombinowaną, złożoną z kilku strategii czystych stosowanych w grze z odpowiednimi częstościami i to w sposób losowy. Taką strategię kombinowaną, polegającą na stosowaniu kilku czystych strategii zmieszanych w sposób losowy z określonymi częstościami, przyjęto nazywać s t r a t e g i ą m i e s z a n ą. Dla oznaczenia strategii mieszanych graczy jest wprowadzona specjalna symbolika. Mianowicie, jeśli strategia mieszana gracza A będzie polegała na stosowaniu przez niego strategii

czystych Y_1, Y_2, ... Y_m z częstościami odpowiednio x_1, x_2, ... x_m, przy czym

$$x_1+x_2+ ... +x_m = 1$$

to strategię tę można oznaczyć następująco

$$X = \begin{pmatrix} Y_1, & Y_2, & ..., & Y_m \\ x_1, & x_2, & ..., & x_m \end{pmatrix}$$

Podobnie można oznaczyć strategię mieszaną gracza *B* jako

$$S = \begin{pmatrix} Z_1, & Z_2, & ..., & Z_n \\ s_1, & s_2, & ..., & s_n \end{pmatrix}$$

przy założeniu, że gracz *B* zastosuje w grze strategie Z_1, Z_2 ..., Z_n z częstościami s_1, s_2, ..., s_n. W praktyce posługujemy się zapisem uproszczonym w postaci

$$X = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m)$$

oraz

$$S = (s_1, s_2, ..., s_j, ..., s_n)$$

Rozwiązanie gry otwartej sprowadza się do wyznaczenia optymalnych strategii mieszanych graczy, tzn. takich strategii X^* i S^*, przy których zastosowaniu wygrane obu graczy są sobie równe i określają tzw. minimaksową wartość gry v. Minimaksowa wartość gry jest zawarta zawsze między dolną i górną wartością gry i określana nierównością

$$\alpha \leqslant v \leqslant \beta$$

Wybór optymalnych strategii mieszanych graczy sprowadza się do określenia optymalnych częstości x_i i s_j dla poszczególnych strategii mieszanych. Zadanie to jest na ogół złożone, przy czym złożoność

ta zależy od rozmiarów macierzy gry. Najprostsze stosunkowo rozwiązanie ma gra typu 2×2, co zilustrujemy na przykładzie ostatniej z podanych wyżej macierzy. Wiersze tej macierzy oznaczymy dodatkowo częstościami x_1 i x_2, a kolumny częstościami s_1 i s_2. Tak oznaczona macierz przedstawia się następująco

A \ B	Z_1	Z_2	
Y_1	1	4	x_1
Y_2	3	2	x_2
	s_1	s_2	

Dla częstości obowiązują równania $x_1+x_2 = 1$ oraz $s_1+s_2 = 1$, stąd wynika, że $x_2 = 1-x_1$ oraz $s_2 = 1-s_1$. Ponieważ dla naszej macierzy zachodzi nierówność $\alpha \neq \beta$, wynika konieczność określenia dla graczy ich optymalnych strategii mieszanych, tj. $X^* = (x_1, x_2)$ dla gracza A oraz $S^* = (s_1, s_2)$ dla gracza B. Wraz z wyznaczeniem optymalnych strategii mieszanych powinna zostać określona minimaksowa wartość gry, która jest jednocześnie średnią wygraną graczy.

Przystępując do rozwiązania wychodzimy z założenia, że wartość średniej wygranej v, którą uzyska gracz A stosując swoją strategię X^*, nie powinna zależeć od tego, jaką strategię czystą będzie stosował w grze gracz B. Zgodnie z tym, przy stosowaniu przez gracza B strategii czystej Z_1 średnia wygrana gracza A będzie określona równaniem

$$1 \cdot x_1+3 \cdot x_2 = v \qquad (2.1)$$

Natomiast przy zastosowaniu przez gracza B strategii Z_2 obowiązuje równanie

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = v \tag{2.2}$$

Biorąc pod uwagę, że $x_2 = 1 - x_1$, otrzymujemy układ równań

$$1 \cdot x_1 + 3(1 - x_1) = v$$
$$4 \cdot x_1 + 2(1 - x_1) = v$$

a następnie

$$1 \cdot x_1 + 3(1 - x_1) = 4 \cdot x_1 + 2(1 - x_1)$$

Rozwiązując ostatnie równanie otrzymujemy

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = 1 - x_1 = \frac{3}{4}$$

Podstawiając wartości x_1 i x_2 do równania (2.1) otrzymujemy

$$v = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}$$

Z kolei przystępujemy do określenia częstości y_1 i y_2 dla gracza B. Rozumując analogicznie, jak w przypadku gracza A, otrzymamy układ równań

$$1 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 = v \tag{2.3}$$

$$3 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 = v \tag{2.4}$$

Wykonując podobne przekształcenia otrzymamy

$$1 \cdot s_1 + 4(1 - s_1) = 3 \cdot s_1 + 2(1 - s_1)$$

a następnie

$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = 1 - s_1 = \frac{1}{2}$$

Podstawiwszy wartości s_1 i s_2 do równania (2.3) sprawdzamy, czy otrzymaliśmy tę samą wartość v, co dla gracza A

$$1 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 = v$$

$$v = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Odpowiedź jest pozytywna.
Rozwiązanie gry jest więc następujące

$$X^* = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$S^* = (s_1, s_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$v = 2\frac{1}{2}$$

Z otrzymanego rozwiązania widać, że obliczone optymalne strategie mieszane graczy zapewniają im wygraną większą, niż to wynika z dolnej i górnej wartości gry. Interpretacja obliczonych średnich częstości x_1, x_2, s_1 i s_2 jest taka, że gracz A w czterech partiach gry raz powinien zastosować strategię Y_1, a trzy razy strategię Y_2, natomiast gracz B swoje strategie Z_1 i Z_2 powinien stosować na przemian — przy czym zmiany strategii powinny być dokonywane losowo. W przypadku, gdy gra przedstawia

pewien proces jednorazowy, częstości x_1, x_2 oraz s_1, s_2 należy traktować jako prawdopodobieństwa, z jakimi obie strony gry uzyskać mogą optymalny wynik gry przy zastosowaniu tylko jednej ze swoich strategii czystych.

W ogólnym przypadku nie wszystkie czyste strategie, będące do dyspozycji danego gracza, wchodzą w skład jego optymalnej strategii mieszanej. Strategie, które wchodzą w skład optymalnej strategii mieszanej danego gracza, będziemy nazywali jego strategiami korzystnymi.

W grach otwartych charakterystyczne jest to, że o ile jeden z graczy, np. gracz A, stosuje swoją optymalną strategię mieszaną X^*, to wygrana pozostaje niezmienna i równa wartości gry v niezależnie od tego, co czyni drugi gracz, byleby tylko nie wyszedł on poza zbiór swoich strategii korzystnych.

Gdy gracz A zorientuje się, że gracz B stosuje strategię różną od swojej optymalnej strategii S^* i strategia ta znana jest graczowi A, to strategia X^* przestaje być optymalna dla gracza A, i korzystniej jest dla niego stosować pewną strategię czystą.

A więc dla gier otwartych, podobnie jak i dla gier zamkniętych, obowiązuje ta sama zasada: dany gracz uzyskuje tym większą wygraną, im dysponuje większą ilością informacji o swym przeciwniku.

Problem rozwiązywania gier

Fundamentalnym twierdzeniem teorii gier, dotyczącym gier dwuosobowych o sumie zerowej, jest twierdzenie minimaksowe udowodnione przez von Neumanna w 1928 r. Nieformalne wypowiedzenie tego twierdzenia przedstawić można następująco: k a ż d a s k o ń c z o n a g r a d w u-

osobowa o sumie zerowej ma co najmniej jedno rozwiązanie, które określa wartość gry i optymalne strategie graczy. Dowody tego twierdzenia są dość złożone, natomiast interpretacja słowna jest bardzo prosta. Mianowicie każdą dwuosobową grę o sumie zerowej — skończoną i opisaną macierzą — możemy rozwiązać, przy czym rozwiązanie to można uzyskać w obszarze strategii czystych lub w obszarze strategii mieszanych. Gdy gra ma rozwiązanie w obszarze strategii czystych, to każdy z graczy ma co najmniej jedną czystą strategię optymalną, która gwarantuje mu wygraną nie mniejszą od wartości gry v określonej elementem macierzy gry. O grze takiej mówimy, że jest zamknięta i ma punkt siodłowy w obszarze strategii czystych. Natomiast w przypadku, gdy gra ma rozwiązanie w obszarze strategii mieszanych, każdy z graczy ma co najmniej jedną optymalną strategię mieszaną, która gwarantuje mu wygraną nie mniejszą niż obliczona wartość gry v. Gra taka jest grą otwartą, a więc nie ma punktu siodłowego, który będąc elementem macierzy gry wyznaczałby wartość gry v. W tym przypadku wartość gry należy obliczyć. Obliczona wartość gry jest punktem siodłowym w obszarze strategii mieszanych, a tym samym gra otwarta w obszarze strategii mieszanych jest grą zamkniętą.

Tryb postępowania przy rozwiązywaniu dowolnej dwuosobowej gry o sumie zerowej jest ściśle określony. Mając zadaną macierz gry wyznaczamy dolną i górną wartość gry, porównujemy uzyskane wartości i w zależności od wyniku porównania określamy optymalne strategie graczy w obszarze strategii czystych lub mieszanych. Jeżeli gra nie ma rozwiązania w obszarze strategii czystych, gdyż $\alpha \neq \beta$, to przed przystąpieniem do rozwiązywania gry

w obszarze strategii mieszanych wskazane jest przeprowadzić, oczywiście o ile to możliwe, tzw. redukcję macierzy gry. Redukcja macierzy gry, inaczej mówiąc zmniejszenie jej rozmiarów, sprowadza się do wyeliminowania z macierzy gry jawnie niekorzystnych strategii czystych obu graczy. Istnieje kilka metod redukcji macierzy gry. Stosunkowo najprostszą jest metoda, oparta na wykorzystaniu pojęcia strategii dominujących obu graczy.

Strategią dominującą danego gracza nazywamy taką strategię, która jest lepsza od innych strategii tego gracza. Strategie dominujące graczy określamy z macierzy gry. Dla gracza A strategie dominujące wyznaczamy w ten sposób, że porównujemy parami wiersze macierzy gry. Jeżeli w trakcie takiego porównania stwierdzimy, że elementy a_{ij} wiersza Y_i macierzy gry są większe lub równe odpowiednim elementom a_{kj} wiersza Y_k, tzn. spełniona jest nierówność $a_{ij} \geqslant a_{kj}$ dla wszystkich $j = 1, 2, \ldots, n$, to mówimy, że strategia Y_i jest strategią dominującą nad strategią Y_k. Gdy strategia Y_i dominuje nad strategią Y_k, to strategia Y_k jako strategia dominowana podlega wykreśleniu z macierzy gry. Podobnie wyznaczamy strategie dominujące gracza B, a mianowicie porównujemy parami kolumny macierzy gry. Jeżeli w trakcie takiego porównania stwierdzimy, że elementy a_{ij} kolumny Z_j nie są większe, lecz najwyżej równe odpowiadającym im elementom a_{is} kolumny Z_s, tzn. spełniona jest nierówność $a_{ij} \leqslant a_{is}$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, m$, to mówimy, że strategia Z_j jest strategią dominującą nad strategią Z_s. W tym przypadku strategia Z_s, dominowana przez strategię Z_j, podlega wykreśleniu z macierzy gry.

W ogólnym przypadku w macierzy gry dla każdego z graczy możemy wyróżnić kilka strategii dominujących. Po przeprowadzonej redukcji, w zreduko-

wanej macierzy gry zostaną tylko te strategie czyste, które nie są dominowane przez żadne inne.
Dla przykładu rozpatrzmy następującą macierz gry typu 5×5

B / A	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
Y_1	3	−3	2	−2	4
Y_2	4	−5	−3	4	−3
Y_3	1	3	2	3	4
Y_4	3	−4	2	−4	3
Y_5	0	−6	−4	2	−3

Dla macierzy tej $\alpha = 1$ i $\beta = 2$, a więc brak punktu siodłowego. W celu określenia strategii dominujących gracza A oraz odpowiadających im strategii dominowanych porównujemy parami wiersze przedstawionej macierzy. W trakcie porównywania łatwo stwierdzimy, że każdy element a_{1j} wiersza Y_1 jest większy lub równy odpowiadającemu mu elementowi a_{4j} wiersza Y_4, a więc strategia Y_1 dominuje nad strategią Y_4. Analogiczny wynik uzyskamy z porównania wierszy Y_2 i Y_5, w tym przypadku strategia Y_2 dominuje nad strategią Y_5. Stąd wniosek, że wiersze Y_4 i Y_5 podlegają wykreśleniu z macierzy gry. Następnie przechodzimy do porównywar kolumn macierzy gry, w wyniku czego stwierdz

że każdy element a_{i2} kolumny Z_2 jest mniejszy lub najwyżej równy odpowiadającemu mu elementowi a_{i4} kolumny Z_4. Strategia Z_2 dominuje więc nad strategią Z_4. Podobnie strategia Z_3 dominuje nad strategią Z_5.

Wykreślając z przedstawionej macierzy gry strategie Y_4 i Y_5 gracza A oraz strategie Z_4 i Z_5 gracza B uzyskamy następującą zredukowaną macierz gry

A \ B	Z_1	Z_2	Z_3	
Y_1	3	−3	2	x_1
Y_2	4	−5	−3	x_2
Y_3	1	3	2	x_3
	s_1	s_2	s_3	

Macierz ta opisuje grę typu 3×3, której rozwiązanie znajduje się w obszarze strategii mieszanych, gdyż $\alpha \neq \beta$. Do rozwiązania tej gry nie można jednak wykorzystać metody przedstawionej w poprzednim punkcie na przykładzie rozwiązania gry 2×2, gdyż w grze 3×3 liczba niewiadomych, tj. x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, v, jest znacznie większa niż dla gry 2×2. Jedna z najprostszych metod rozwiązania gry 3×3 zostanie przedstawiona poniżej. W metodzie tej posługiwać się będziemy pojęciem częstości względnej, stąd też na początku scharakteryzujemy to pojęcie.

Względna częstość jest pewną wielkością umowną i wyrażana jest liczbą całkowitą. Jeżeli np. z rozwią-

zania gry w obszarze strategii mieszanych wynika, że gracz A na 13 partii powinien zastosować 8 razy strategię czystą Y_1, a 5 razy strategię Y_2, to liczba 8 jest względną częstością strategii Y_1, a liczba 5 względną częstością strategii Y_2. Natomiast sam stosunek 8 : 5 określa optymalną strategię mieszaną gracza A.

Wróćmy teraz do naszej przykładowej macierzy gry i postarajmy się najpierw określić względne częstości strategii gracza B. W tym celu odejmujemy każdy wiersz macierzy od wiersza znajdującego się nad nim, tj. każdą wypłatę a_{ij} od wypłaty znajdującej się nad nią, tzn. od wypłaty $a_{i-1,j}$. W wyniku otrzymamy następującą macierz zastępczą

Z_1	Z_2	Z_3
−1	2	5
3	−8	−5

Wykreślając z tej macierzy kolumnę Z_1 otrzymamy macierz

Z_1	Z_2	Z_3
	2	5
	−8	−5

Obliczając różnicę iloczynów liczb leżących na przekątnych tej macierzy, określimy względną częstość

strategii Z_1, którą oznaczymy symbolem s'_1. Z obliczeń wynika, że:

$$s'_1 = 2 \cdot (-5) - (-8) \cdot 5 = 30$$

Analogicznie postępujemy przy określaniu względnych częstości dla strategii Z_2 i Z_3. Wykreślając odpowiednie kolumny z macierzy zastępczej i wykonując obliczenia otrzymamy

Z_1	Z_2	Z_3
-1		5
3		-5

$$(-1) \cdot (-5) - 3 \cdot 5 = -10$$
$$s'_2 = 10$$

Z_1	Z_2	Z_3
-1	2	
3	-8	

$$(-1) \cdot (-8) - 2 \cdot 3 = 2$$
$$s'_3 = 2$$

Względne częstości strategii czystych gracza B wynoszą więc odpowiednio: $s'_1 = 30$, $s'_2 = 10$, $s'_3 = 2$; ewentualny znak minus przy wynikach obliczeń jest pomijany, stąd $s'_2 = 10$, a nie -10. Optymalna strategia mieszana gracza B, określona we względnych częstościach, wynosi $30 : 10 : 2$.

Mając obliczone względne częstości s'_1, s'_2, s'_3, możemy obliczyć częstości s_1, s_2, s_3 w następujący sposób

$$s = s'_1 + s'_2 + s'_3 = 30 + 10 + 2 = 42$$

$$s_1 = \frac{s'_1}{s} = \frac{30}{42}$$

$$s_2 = \frac{s'_2}{s} = \frac{10}{42}$$

$$s_3 = \frac{s'_3}{s} = \frac{2}{42}$$

Optymalna strategia mieszana gracza B wyrażona w częstościach s_1, s_2, s_3 wyniesie

$$S^* = (s_1, s_2, s_3) = \left(\frac{30}{42}, \frac{10}{42}, \frac{2}{42}\right)$$

Z kolei przystępujemy do wyznaczenia względnych częstości dla poszczególnych strategii gracza A. W tym też celu odejmujemy w macierzy gry każdą kolumnę od kolumny, która znajduje się z jej lewej strony, w ten sposób, że każdą wypłatę a_{ij} kolumny Z_j odejmujemy od odpowiadającej jej wypłaty $a_{i,j-1}$ kolumny Z_{j-1}. Zapisując odpowiednio wyniki odejmowania otrzymamy następującą macierz zastępczą

Y_1	6	-5
Y_2	9	-2
Y_3	-2	1

Wykreślając z macierzy zastępczej wartości wiersza Y_1 otrzymujemy macierz

Y_1		
Y_2	9	-2
Y_3	-2	1

Obliczając różnicę iloczynów liczb stojących na przekątnych tej macierzy otrzymamy wartość względnej częstości strategii Y_1, tj.

$$x_1' = 1 \cdot 9-(-2) \cdot (-2) = 5$$

Postępując analogicznie przy określeniu względnych częstości strategii Y_2 i Y_3 otrzymujemy

Y_1	6	-5
Y_2		
Y_3	-2	1

$$1 \cdot 6-(-2) \cdot (-5) = -4$$
$$x_2' = 4$$

Y_1	6	-5
Y_2	9	-2
Y_3		

$$(-2) \cdot 6-9 \cdot (-5) = 33$$
$$x_3' = 33$$

Względne częstości strategii czystych gracza A wynoszą więc odpowiednio $x_1' = 5$, $x_2' = 4$, $x_3' = 33$,

a optymalna strategia mieszana określona w tych częstościach wynosi 5 : 4 : 33.

Obliczając z kolei częstości x_1, x_2, x_3 otrzymujemy

$$x = x'_1+x'_2+x'_3 = 5+4+33 = 42$$

$$x_1 = \frac{x'_1}{x} = \frac{5}{42}$$

$$x_2 = \frac{x'_2}{x} = \frac{4}{42}$$

$$x_3 = \frac{x'_3}{x} = \frac{33}{42}$$

Optymalna strategia mieszana gracza *A* wyrażona w częstościach x_1, x_2, x_3 przedstawia się więc następująco

$$X^* = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{42}, \frac{4}{42}, \frac{33}{42}\right)$$

Znając już optymalne strategie mieszane graczy, tj. X^* dla gracza *A* i S^* dla gracza *B*, możemy przystąpić do obliczenia minimaksowej wartości gry v. Posługujemy się przy tym wskazaną już wyżej prawidłowością, że przy zastosowaniu przez dowolnego z graczy jego optymalnej strategii mieszanej wygrana tego gracza powinna być równa minimaksowej wartości gry v, niezależnie od tego, jaką strategię czystą będzie stosował jego przeciwnik.

Należy więc sprawdzić, czy tak jest istotnie. Zakładając, że gracz *A* stosuje strategię mieszaną X^*, a gracz *B* strategię czystą Z_1, wygrana gracza *A* wyniesie

$$v = 3\cdot x_1+4\cdot x_2+1\cdot x_3 =$$

$$= 3\cdot\frac{5}{42}+4\cdot\frac{4}{42}+1\cdot\frac{33}{42} = 1\,\frac{11}{21}$$

Przy zastosowaniu przez gracza B innej strategii czystej wygrana gracza A wyniesie

$$\text{dla } Z_2: \quad v = (-3) \cdot x_1 + (-5) \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1\frac{11}{21}$$

$$\text{dla } Z_3: \quad v = 2 \cdot x_1 + (-3) \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 1\frac{11}{21}$$

Postępując analogicznie przy określaniu wygranej gracza B, przy założeniu, że gracz A stosuje strategię czystą, otrzymamy

$$\text{dla } Y_1: \quad v = 3 \cdot s_1 + (-3) \cdot s_2 + 2 \cdot s_3 =$$

$$= 3 \cdot \frac{30}{42} - 3 \cdot \frac{10}{42} + 2 \cdot \frac{2}{42} = 1\frac{11}{21}$$

$$\text{dla } Y_2: \quad v = 4 \cdot s_1 + (-5) \cdot s_2 + (-3) \cdot s_3 = 1\frac{11}{21}$$

$$\text{dla } Y_3: \quad v = 1 \cdot s_1 + 3 \cdot s_2 + 2 \cdot s_3 = 1\frac{11}{21}$$

Z przedstawionych obliczeń wynika, że za każdym razem wartość v jest ta sama. Rozwiązanie gry jest więc właściwe, a wynikająca ze sprawdzenia wielkość v jest minimaksową wartością gry.

Stosując taką samą metodę do rozwiązania gry podanej w przykładzie 1 (s. 25) otrzymamy następujący wynik

$$X^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad S^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad v = 0.$$

W dotychczasowych naszych rozważaniach ograniczyliśmy się wyłącznie do przedstawienia metod rozwiązywania gier 2×2 i 3×3. Metody te z pewną modyfikacją możemy zastosować również do rozwiązywania gier $2 \times n$, $m \times 2$, $3 \times n$ i $m \times 3$. Pomocne jest tutaj istniejące w teorii gier twierdzenie, mówiące o tym, że dla dowolnej gry $m \times n$ istnieje takie rozwiązanie, w którym liczba strategii korzystnych dla każdej z dwóch stron gry nie jest większa od mniejszej liczby spośród liczb m i n. Na podstawie tego twierdzenia, po zastosowaniu odpowiedniej metody redukcji macierzy gry, grę typu $2 \times n$ lub $m \times 2$ można sprowadzić do postaci gry 2×2. Podobnie grę $3 \times n$ lub $m \times 3$ można sprowadzić do postaci gry 3×3.

Gdy liczba strategii każdego z graczy jest większa od czterech, rozwiązanie gry $m \times n$ jest dość trudnym zadaniem, przy czym złożoność zadania i ilość obliczeń potrzebnych do rozwiązania rośnie gwałtownie ze wzrostem m i n. Do rozwiązywania takich gier wykorzystuje się najczęściej metody programowania liniowego i metody iteracyjne.

Posługiwanie się tymi metodami jest związane z koniecznością przeprowadzenia dużej ilości obliczeń. Bardzo często liczba ich jest tak duża, że uniemożliwia rozwiązanie gry drogą odręcznych obliczeń. Narzuca się więc potrzeba wykorzystania do tego celu maszyny cyfrowej. Jako przykład niech służy fakt, że rozwiązanie gry dwuosobowej o sumie zerowej w obszarze strategii mieszanych przy macierzy gry typu 100×100 jest związane z wykonaniem ponad 8 milionów elementarnych operacji arytmetycznych. Aby wykonać tyle operacji, jeden człowiek biegły w działaniach matematycznych musiałby liczyć bez przerwy około 16 666 godzin, czyli 694 doby. Wykorzystując do tego celu maszynę cyfrową o śred-

niej szybkości obliczeń uzyskamy rozwiązanie gry w przeciągu około jednej minuty. Z podanego przykładu wynika więc, że maszyna cyfrowa jest jedynym i niezmiernie użytecznym urządzeniem umożliwiającym rozwiązywanie gier o dużej liczbie strategii.

3

Gry wielochodowe

Pojęcie gry wielochodowej

Omówiona w poprzednim rozdziale postać normalna gry dwuosobowej charakteryzuje się stosunkowo prostą strukturą, która przydatna jest do analizy matematycznej, a tym samym ułatwia rozwiązanie gry przez określenie optymalnych strategii graczy i wartości gry. Jednakże samo przedstawienie gry dwuosobowej w postaci normalnej jest problemem bardzo złożonym, gdyż sprowadzenie większości konkretnych gier do postaci normalnej przekracza ludzkie możliwości. Na przykład przedstawienie gry w szachy w postaci normalnej, pomimo że gra ta ma punkt siodłowy w obszarze strategii czystych, jest obecnie jeszcze zamierzeniem nierealnym ze względu na olbrzymią ilość strategii czystych obu graczy. Ponadto należy zauważyć, że szereg sytuacji konfliktowych dotyczy procesów wieloetapowych.

Opisanie tych procesów modelem gry w postaci normalnej jest sprzeczne z charakterem przebiegu samego procesu i w praktyce jest mało przydatne. Niemożliwość wyrażenia wielu gier przy pomocy macierzy gry przyczynia się do tego, że zakres wykorzystania postaci normalnej gry do opisu sytuacji konfliktowych jest poważnie ograniczony.

Pierwotnym modelem większości gier dwuosobowych jest ich postać ekstensywna, znana pod nazwą gry wielochodowej. W grze wielochodowej poszczególne ruchy graczy wykonywane są nie jednocześnie, ale na przemian. W trakcie ruchów gracze dokonują wyborów ze zbioru przyporządkowanych im alternatyw. Alternatywa nosi nazwę strategii chodowej, a zbiór alternatyw danego gracza jest zbiorem jego strategii chodowych.

Ograniczając nasze rozważania wyłącznie do gry dwuosobowej, będziemy przyjmować, że zbiór strategii chodowych gracza A wyraża się postacią

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_i \ldots, y_w\} \tag{3.1}$$

gdzie y_i — i-ta strategia chodowa gracza A.

Przedstawiony przez nas zbiór Y jest zbiorem pewnych elementów abstrakcyjnych (symboli), z których każdy wyraża ściśle określoną strategię chodową gracza A. Fakt, że dany element y_i jest elementem zbioru Y będziemy zapisywać w postaci $y_i \in Y$ i czytać, że y_i należy do zbioru Y (znak $\in$ oznacza przynależność elementu do zbioru; stanowi pierwszą literę greckiego słowa $\in \sigma\tau i$ — jest). Bardzo często, przy rozpatrywaniu zbiorów, zachodzi konieczność podzielenia danego zbioru na określone podzbiory. Na przykład zbiór Y można byłoby podzielić na dwie części, tj. na dwa podzbiory $Y^{(1)}$ i $Y^{(2)}$, przy czym podzbiór $Y^{(1)}$ mógłby zawierać te strategie chodowe gracza A, które są dla niego korzystne, natomiast podzbiór $Y^{(2)}$ mógłby zawierać te strategie chodowe gracza A, które są dla niego niekorzystne. Zarówno podzbiór $Y^{(1)}$, jak i $Y^{(2)}$ rozpatrywane oddzielnie są zbiorami określonych elementów y_i. Fakt, że dany zbiór, np. $Y^{(1)}$, jest

zawarty w zbiorze Y, tzn. jest jego podzbiorem, będziemy zapisywać w postaci $Y^{(1)} \subset Y$. Symbol $\subset$ nazywamy znakiem inkluzji i stosujemy dla oznaczenia faktu, że dany zbiór jest częścią składową jakiegoś innego zbioru.

Po tej krótkiej uwadze wróćmy do drugiego z naszych graczy, tj. do gracza *B*. W grze wielochodowej gracz *B* jest przeciwnikiem gracza *A* i jako taki również dysponuje zbiorem możliwych do zastosowania strategii chodowych. Analogicznie do zbioru Y zbiór strategii chodowych gracza *B* oznaczać będziemy następująco

$$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_s\} \qquad (3.2)$$

gdzie z_j — j-ta strategia chodowa gracza *B*.

Ciąg wyborów dokonywanych przez graczy na przemian, począwszy od momentu rozpoczęcia gry aż do jej zakończenia, nosi nazwę partii. Każda partia doprowadza do odpowiedniego wyniku gry, korzystnego dla jednego lub drugiego gracza, lub też do remisu. Na partię gry wielochodowej składa się ściśle określony ciąg strategii chodowych gracza *A* i gracza *B*. Zastosowany w dowolnej partii ciąg strategii chodowych danego gracza nosi nazwę strategii pełnej tego gracza. Strategia pełna w grze wielochodowej jest odpowiednikiem strategii czystej w grze wyrażonej postacią normalną. Gdy dla danej gry wielochodowej istnieje możliwość określenia wszystkich strategii pełnych obu graczy, grę taką możemy przedstawić w postaci normalnej — oczywiście, jeżeli liczba strategii pełnych nie jest zbyt duża. Podobnie grę przedstawioną w postaci normalnej można przedstawić w postaci ekstensywnej, dzieląc umownie strategie czyste na pewne strategie

chodowe oraz zakładając, że partnerzy wykonują swoje ruchy nie jednocześnie, lecz na przemian. W grze wielochodowej charakterystyczne jest to, że nie wolno nam izolować i abstrahować każdego ruchu oddzielnie, ponieważ znaczenie jego w grze zależy także od niektórych innych ruchów. Mianowicie — wartość wyboru konkretnej strategii chodowej przez gracza zależy zarówno od wyborów dokonanych przez tego gracza w poprzednich ruchach, jak i od wyborów dokonanych przez jego przeciwnika.

Dendryt gry

Najwygodniejszą do analizy postacią przedstawienia gier wielochodowych jest postać graficzna. Przy przedstawieniu gry wielochodowej w postaci graficznej posługujemy się pojęciem grafu. Graf jest figurą geometryczną składającą się ze skończonej liczby punktów zwanych wierzchołkami oraz z łączących je odcinków lub łuków zwanych krawędziami. Graf przedstawiający grę wielochodową ze względu na swą strukturę nosi nazwę dendrytu gry lub drzewa gry.

Wyjaśnienie pojęcia drzewa (dendrytu) gry poprzedzimy pewną opowiastką baśniową, która ułatwi nam niewątpliwie zrozumienie postaci graficznej gry wielochodowej.

Dwa krasnoludki, czarny i biały, postanowiły wybrać się na wycieczkę w głąb rozłożystej jabłoni. Aby uprzyjemnić wycieczkę i nadać jej jakiś cel, krasnoludki potraktowały swoją wycieczkę jako pewnego rodzaju grę dwuosobową. Opracowane przez nich reguły gry sprowadzały się do tego, że gracz *A* będzie wpływał na przebieg wycieczki tak,

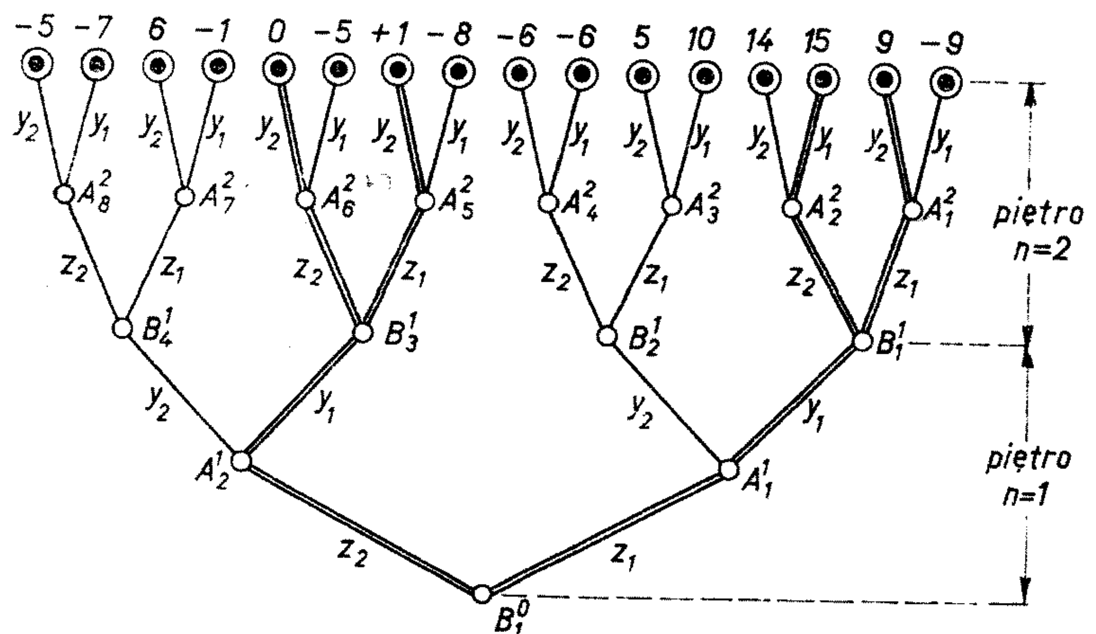
aby dojść do tego punktu jabłoni, w którym znajduje się możliwie największe jabłko, natomiast gracz *B* tak, aby zakończyła się ona w tym punkcie jabłoni, w którym nie ma żadnego jabłka lub znajduje się jabłko możliwie najmniejsze.

Z reguł gry wynika, że przedsięwzięcia podejmowane przez krasnoludki w trakcie wycieczki będą sobie przeciwstawne. Krasnoludki wiedziały, że wycieczka dojdzie do skutku tylko wtedy, gdy decyzje dotyczące wyboru kierunku marszruty będą podejmowane nie jednocześnie przez obydwóch, lecz na przemian przez każdego z nich. Po przeprowadzonej naradzie ustalono więc, że prawo wyboru kierunku marszruty ma przewodnik wycieczki, przy czym w każdym punkcie rozgałęzienia gałęzi jabłoni następuje zmiana przewodnika. Zgodnie z tym przyjęto, że najpierw przewodnikiem będzie gracz *B*, następnie gracz *A*, później znów gracz *B*, gracz *A* itd., aż do osiągnięcia takiego punktu w koronie jabłoni, który jest punktem zakończenia gry. Przystępując do realizacji „wycieczki — gry", krasnoludki drogą losowania ustaliły, że graczem *B* będzie krasnoludek biały, a graczem *A* — krasnoludek czarny. Właściwa gra rozpoczyna się przy napotkaniu pierwszego rozgałęzienia; gracz *B* dokonuje wówczas wyboru kierunku marszruty, przy napotkaniu następnego rozgałęzienia wyboru kierunku marszruty dokonuje gracz *A* itd.

Wynik gry zależny jest od dokonywanych przez graczy *A* i *B* wyborów kierunków marszrut. Powyższa gra jest grą dwuosobową, a jej postacią graficzną jest drzewo gry, którego struktura, określona konfiguracją krawędzi i wierzchołków, odpowiada strukturze jabłoni. Oczywiście przy takim odwzorowaniu struktury jabłoni strukturą drzewa gry, gałęzie jabłoni reprezentowane są przez linie proste, a pier-

wsze rozgałęzienie jabłoni jest wierzchołkiem początkowym drzewa (dendrytu) gry.

W dalszych naszych rozważaniach termin „drzewo gry" będziemy zastępować terminem „dendryt gry", ponieważ w polskiej literaturze naukowej termin „dendryt" jest bardziej popularny i częściej spotykany. Przykładowy dendryt gry dla pewnej fikcyjnej gry, podobnej do zilustrowanej wyżej gry krasnoludków, przedstawiony został na ryc. 1.



Ryc. 1

Wśród wierzchołków dendrytu gry wyróżnia się: wierzchołek początkowy, zwany często korzeniem dendrytu, wierzchołki leżące na różnych poziomach dendrytu oraz wierzchołki końcowe. Wierzchołki dendrytu odzwierciedlają sytuację powstałą w grze. Każdy wierzchołek dendrytu, z wyjątkiem końcowych, jest opisany symbolem gracza wykonującego ruch w danej sytuacji, a przy każdym wierzchołku końcowym podaje się przyporządkowany mu końcowy wynik gry. Krawędzie dendrytu reprezentują

strategie chodowe, które gracze mogą wykonać w procesie realizacji gry, stąd też krawędzie opisane są symbolami z_j lub y_i przynależnymi do zbioru możliwych strategii chodowych graczy. Dendryt o m wierzchołkach ma $m-1$ krawędzi i jest grafem spójnym. Spójność dendrytu wynika z tego, że można w nim wyodrębnić dokładnie tylko jedną trasę (łuk), łączącą dowolną parę wierzchołków. Łuk łączący wierzchołek początkowy dendrytu z jednym z wierzchołków końcowych dendrytu jest ścieżką dendrytu. Ścieżka taka reprezentuje partię gry. Pomimo że w dendrycie gry krawędziom nie nadaje się żadnego kierunku (brak strzałek), przyjmuje się umownie, że dendryt gry jest grafem skierowanym, gdyż opisuje proces przebiegający w kierunku od wierzchołka początkowego do jednego z wierzchołków końcowych dendrytu. Dendryt jest podzielony na piętra, przy czym numer dowolnego piętra jest zgodny z numerem porządkowym odpowiadającego mu posunięcia w grze. Posunięcie obejmuje ruch gracza rozpoczynającego grę oraz odpowiedź na ten ruch jego przeciwnika.

W celu określenia położenia wierzchołków w dendrycie, każdy z nich — z wyjątkiem końcowych — opisano symbolem partnera wykonującego ruch w sytuacji, oznaczonej tym wierzchołkiem, i oprócz tego oznaczono dwiema współrzędnymi n i k. Współrzędna n wskazuje numer piętra, w którym wierzchołek się znajduje, natomiast współrzędna k określa numer porządkowy danego wierzchołka w piętrze n. Kompletny symbol opisujący wierzchołek ma więc postać A_k^n lub B_k^n, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots, m$. Wierzchołki końcowe dendrytu są punktami zakończenia gry i charakteryzują te partie gry, które do nich doprowadzają. Każdemu wierzchołkowi dendrytu jest przyporządkowany tylko jeden wynik

gry, będący elementem zbioru $R = \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_s, ... \rho_t\}$ obejmującego wszystkie możliwe wyniki gry. Wyniki gry mogą być wyrażone liczbowo lub w postaci symboli, np. dla gry w szachy zbiór R zawiera tylko trzy elementy wyróżnione w dendrycie gry różnym kształtem wierzchołków końcowych. Dla gry przedstawionej dendrytem z ryc. 1 zbiór R przedstawia się następująco:

$$R = \{-9, -8, -7, -6, -5, -1, 0, 1, 5, 6, 9, 10, 14, 15\}$$

Dendryt gry ilustruje wszystkie możliwe warianty rozegrania gry, którą przedstawia. Dla przykładu rozpatrzmy przebieg gry na podstawie dendrytu z ryc. 1.

Grę prowadzi dwóch graczy: A i B. Celem gry jest uzyskanie jak największej wygranej przez każdego z graczy kosztem przegranej swego przeciwnika. Zbiór możliwych strategii chodowych gracza A wynosi $Y = \{y_1, y_2\}$, natomiast zbiór możliwych strategii chodowych gracza B wynosi $Z = \{z_1, z_2\}$.

Zgodnie z przedstawionym dendrytem, grę rozpoczyna gracz B, dlatego też wierzchołek początkowy dendrytu jest opisany symbolem B_1^0. Na początku gry, tj. w sytuacji określonej wierzchołkiem B_1^0, gracz B może zastosować strategię chodową z_1 lub z_2. Gdy gracz B zastosuje strategię chodową z_1, powstaje sytuacja opisana wierzchołkiem A_1^1 dendrytu. Natomiast gdy gracz B zastosuje strategię chodową z_2, sytuacja powstała w grze jest określona wierzchołkiem A_2^1 dendrytu. Realizacja następnego ruchu w pierwszym posunięciu należy do gracza A. Zarówno w sytuacji A_1^1 jak i A_2^1 gracz A może zastosować strategię chodową y_1 lub y_2, a więc w zależności od

wyboru gracza B dokonanego w pierwszym posunięciu i odpowiedzi na ten wybór gracza A w tym posunięciu, sytuację powstałą po pierwszym posunięciu jednoznacznie określa jeden z wierzchołków B^1_1, B^1_2, B^1_3, B^1_4. Analogiczny proces wystąpi w trakcie realizacji drugiego posunięcia.

W rozpatrywanej grze każdy z graczy może zastosować ściśle określoną strategię postępowania, która jest kombinacją dwóch możliwych strategii chodowych danego gracza i doprowadza do jednego z wierzchołków końcowych dendrytu. Kombinacja strategii chodowych danego gracza, przyporządkowana jednej ze ścieżek dendrytu, jest strategią pełną tego gracza. Na przykład na ryc. 1 druga z prawej strony ścieżka dendrytu jest opisana następującym ciągiem symboli: $z_1\, y_1\, z_1\, y_2$. Ciąg ten wyraża strategię pełną gracza B w postaci kombinacji $z_1\, z_2$ oraz strategię pełną gracza A w postaci kombinacji $y_1\, y_2$. Inaczej mówiąc, strategią pełną danego gracza będzie uporządkowany ciąg jego strategii chodowych występujących w opisie jednej ze ścieżek dendrytu. W rozpatrywanej grze każdy z graczy ma do dyspozycji cztery następujące strategie pełne

dla gracza A	dla gracza B
$Y_1 = y_1\, y_1$	$Z_1 = z_1\, z_1$
$Y_2 = y_1\, y_2$	$Z_2 = z_1\, z_2$
$Y_3 = y_2\, y_1$	$Z_3 = z_2\, z_1$
$Y_4 = y_2\, y_2$	$Z_4 = z_2\, z_2$

Znając strategie pełne graczy, możemy przejść od postaci ekstensywnej gry do postaci normalnej, przedstawionej następującą macierzą

B / A	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	α*
Y_1	−9	15	−8	−5	−9
Y_2	9	14	1	(0)	(0)
Y_3	10	−6	−1	−7	−7
Y_4	5	−6	6	−5	−6
β*	10	15	6	(0)	

Jak łatwo zauważyć, gra ta ma punkt siodłowy w obszarze strategii czystych, a minimaksowa wartość gry wynosi $v = 0$. Optymalną strategią czystą gracza A jest strategia Y_2, natomiast optymalną strategią czystą gracza B jest strategia Z_4. Oczywiście optymalne strategie czyste określone na podstawie macierzy gry są również optymalnymi strategiami pełnymi w grze wielochodowej. Ze względu na charakter przebiegu gry wielochodowej przejście z postaci ekstensywnej na postać normalną jest uzasadnione tylko wtedy, gdy obaj partnerzy są rozumni i dążą do zapewnienia sobie największej wygranej. Jeżeli natomiast jeden z graczy będzie stosował swoje strategie chodowe w sposób losowy lub też będzie popełniał błędy w poszczególnych ruchach, to znajomość optymalnej strategii pełnej przez drugiego gracza jest dla niego mało przydatna. Wynika to z tego, że ten drugi gracz, jako bardziej rozumny partner, będzie dążył do wykorzystania błędów

popełnianych przez swego przeciwnika w celu zmaksymalizowania swojej wygranej. Maksymalizację tę może sobie zapewnić wyłącznie przez odstępstwo od swej optymalnej strategii pełnej. Można więc stwierdzić, że postać normalna dla gry wielochodowej ułatwia jej rozwiązanie, lecz nie wnika w proces realizacji gry wielochodowej.

Gry z pełną informacją

Jak już wiadomo, proces prowadzenia gry wielochodowej charakteryzuje się tym, że ruchy graczy są wykonywane nie jednocześnie, ale na przemian. Przy takim prowadzeniu gry podział gier wielochodowych jest zdeterminowany zasobem posiadanej przez każdego z graczy informacji o ruchach swego przeciwnika. Jeżeli w trakcie realizacji gry wielochodowej każdy z graczy jest poinformowany o wyborach dokonywanych przez swego przeciwnika w przyporządkowanych mu ruchach, to wówczas powiemy, że gracze dysponują pełną informacją o przebiegu gry, a samą grę nazwiemy grą z pełną informacją. Gdy natomiast w grze wielochodowej co najmniej jeden z graczy nie zna wyborów dokonywanych przez jego przeciwnika w kolejnych ruchach, grę taką nazwiemy grą z niepełną informacją.

Na początku scharakteryzujemy gry wielochodowe z pełną informacją. Przykładem ich są takie gry, jak warcaby, kółko i krzyżyk, szachy. W dowolnej sytuacji, powstałej w trakcie prowadzenia gry wielochodowej z pełną informacją, gracze zawsze wiedzą, w jakim wierzchołku dendrytu sytuacja ta się znajduje. Oczywiście bardzo często dendryt gry jest pojęciem czysto abstrakcyjnym, gdyż nie można go narysować ze względu na olbrzymią liczbę strategii

pełnych graczy. Nie przeszkadza to jednak w posługiwaniu się tym pojęciem, gdyż ułatwia ono analizę przebiegu gry, tym bardziej że w trakcie realizacji gry jest budowana jedna ze ścieżek dendrytu, którą zawsze możemy sobie narysować.

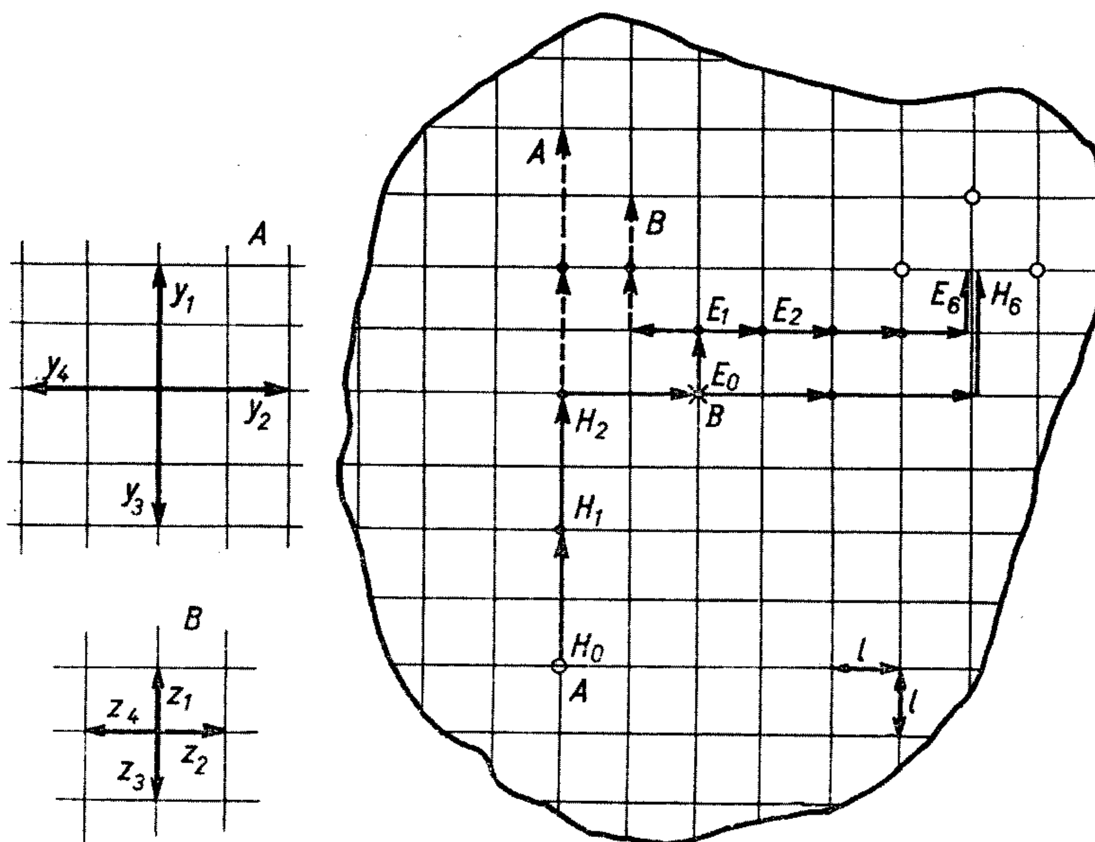
Gra wielochodowa z pełną informacją może być skończona lub nieskończona. Gra skończona charakteryzuje się tym, że każdy z graczy ma skończoną liczbę strategii pełnych. Dendryt takiej gry jest również skończony, tzn. po narysowaniu dendrytu — oczywiście, o ile to możliwe — będzie w nim skończona liczba ścieżek. Gdy liczba strategii pełnych graczy jest nieskończona, dendryt gry jest również nieskończony, a sama gra należy do klasy gier nieskończonych. W teorii gier istnieje łatwe do udowodnienia twierdzenie, że każda dwuosobowa gra wielochodowa z pełną informacją i o sumie zerowej ma punkt siodłowy. Punkt ten można jednoznacznie określić, gdy dendryt gry jest skończony. Dokonuje się wówczas przejścia z postaci ekstensywnej do postaci normalnej gry opisanej macierzą. Na podstawie macierzy gry bez trudności można określić punkt siodłowy gry oraz optymalne strategie pełne (czyste) graczy, tak jak to przedstawiono w poprzednim punkcie niniejszego rozdziału.

Rozpatrzmy obecnie przykład gry wielochodowej z pełną informacją, co ułatwi nam również zrozumienie rozdziału 7 książki.

P r z y k ł a d 3 — gra „Samochód policyjny"

Na ulicach miasta rozgrywa się pościg za uciekającą grupą przestępców. Obiektem ścigającym jest samochód policyjny *A*, obiektem uciekającym — samochód przestępców *B*. Ulice miasta przecinają się pod kątem prostym i tworzą siatkę złożoną z jednakowych kwadratów. Szybkość samochodu *A* jest dwa razy większa od szybkości samochodu *B*, tzn.

$V_A = 2V_B$, gdzie V_A, V_B — szybkości samochodów nie zmieniające się w czasie. Przyjmując, że decyzje dotyczące kierunków jazdy samochodów są podejmowane przez dysponentów samochodów na przemian i realizowane w ściśle określonych momentach czasu, powyższy pościg można potraktować jako proces prowadzenia dwuosobowej gry wielochodowej. Przyjmując dodatkowo założenie, że w trakcie realizacji procesu pościgu i ucieczki gracze znają nawzajem swoje kolejne położenia, grę tę zaliczymy do gier z pełną informacją. Dla uproszczenia modelu



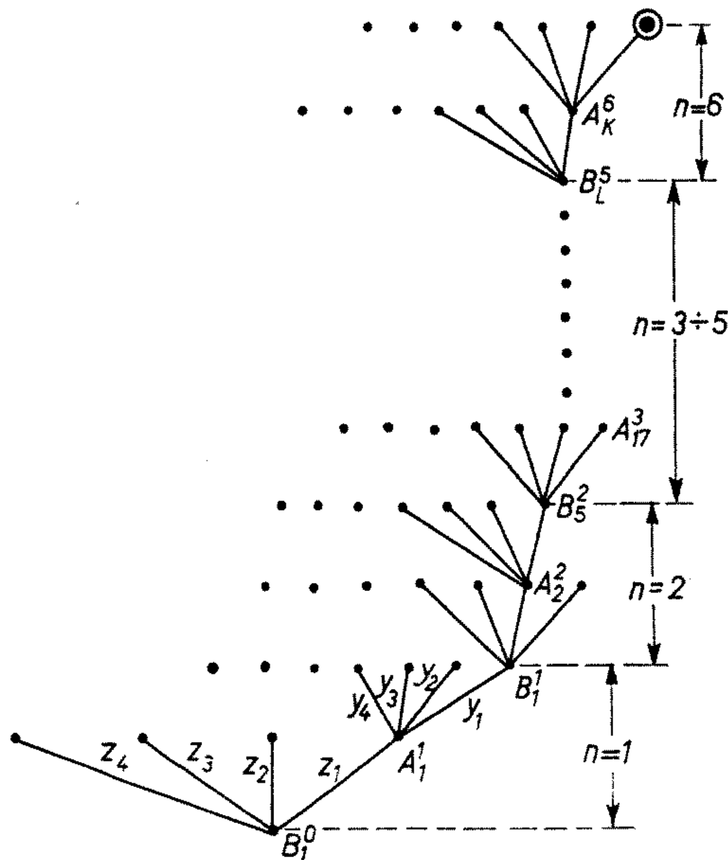
Ryc. 2

gry pomijamy, w jaki sposób każdy z graczy uzyskuje informację o położeniu swego przeciwnika i podejmowanych przez niego decyzjach. Szkic sytuacyjny gry przedstawiony został na ryc. 2.

Celem gry dla gracza A jest zbliżenie się do samochodu B w jak najkrótszym czasie na dostatecznie bliską odległość s, spełniającą warunek $s \leqslant l$, gdzie l — długość boku pojedynczego kwadratu siatki z ryc. 2. Zgodnie z tym warunkiem doścignięcie samochodu B przez samochód A nastąpi wtedy, gdy ruchome punkty A i B na rycinie pokryją się lub znajdą w sąsiadujących ze sobą węzłach siatki. Natomiast celem gry dla gracza B jest uniknięcie schwytania lub wydłużenie czasu, w którym ono nastąpi. Wypłatą w grze jest liczba posunięć, po których obiekt B zostanie przechwycony przez A. Oczywiście A dąży do zmniejszenia tej liczby, a B do jej zwiększenia.

Posługując się ryc. 2 prześledźmy teraz jeden z możliwych przebiegów tej gry. W początkowej sytuacji gry obiekt A znajduje się w punkcie H_0, obiekt B — w punkcie E_0. Każdy z graczy ma do dyspozycji cztery możliwe strategie chodowe, które są dopuszczalnymi kierunkami przemieszczania się obiektów. Strategie te przedstawiono na ryc. 2 odpowiednim układem wektorów. Ponieważ $V_A =$ $=$ const i $V_B =$ const oraz $V_A = 2V_B$, pożądane jest przyjąć stałą jednostkę czasu T, w której obiekt B, realizując swoją dowolną strategię chodową, przebywa drogę $s = l$. W tym samym czasie T obiekt A przy realizacji swojej strategii chodowej będzie przebywał drogę $s = 2l$. Długości dróg przebytych przez obiekty w czasie T wynikają z porównania wektorów. Zakładając, że grę rozpoczyna gracz B, można narysować dendryt gry, ilustrujący wszystkie możliwe warianty rozegrania pościgu przez A i ucieczki przez B. Fragment tego dendrytu przedstawiono na ryc. 3. Gdy w sytuacji początkowej gry, określonej wierzchołkiem B_1^0 dendrytu, obiekt B wykona strategię chodową z_1, to po czasie T znajdzie się w punkcie E_1 siatki z ryc. 2, a sytuacja powstała

w grze będzie określona wierzchołkiem A^1_1 dendrytu. W momencie, gdy obiekt B znajdzie się w punkcie E_1, rozpoczyna pościg obiekt A, wybierając i realizując jedną ze swoich strategii chodowych. Załóżmy, że



Ryc. 3

strategią chodową wybraną przez A jest strategia y_1. Obiekt A wykonując tę strategię po czasie T znajdzie się w punkcie H_1. W tym samym czasie, w którym obiekt A wykonuje swój pierwszy ruch, obiekt B, ze względu na ciągłość procesu, realizuje swój drugi ruch. Po czasie $2T$ od momentu rozpoczęcia gry, obiekty — zgodnie z regułami prowadzenia gry wielochodowej — powinny się znajdować w punktach: H_1 dla A i E_1 dla B. W rzeczywistości obiekt B po pierwszym posunięciu w grze nie będzie w punkcie

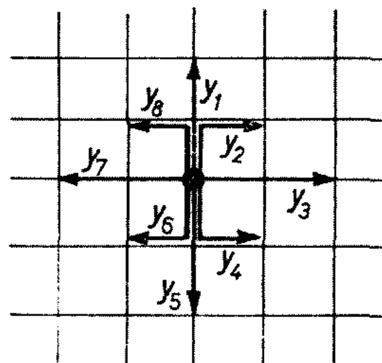
E_1, lecz w innym już punkcie, tj. w punkcie E_2, tak jak to wynika z ryc. 2. Istnieje więc pewne przesunięcie czasowe w przebiegu gry, tzn. gdy gracz A realizuje ruch w pierwszym posunięciu, gracz B wykonuje już ruch w drugim posunięciu. Po każdym posunięciu w grze gracz A sprawdza, czy spełniony jest warunek zakończenia gry $s \leqslant l$. Po pierwszym posunięciu warunek ten nie jest spełniony, sytuacja określona jest wierzchołkiem B_1^1 dendrytu i gracz A na podstawie informacji o aktualnym położeniu obiektu B wykonuje swój drugi ruch.

Na ryc. 2 pokazano linią pogrubioną przykładowy wariant tej gry, dotyczący przypadku, gdy po sześciu posunięciach w grze położenia obiektów A i B powinny się pokrywać, oczywiście zgodnie z regułami prowadzenia gry wielochodowej. Punkt wzajemnego pokrycia oznaczony jest symbolami E_6 i H_6. Ponieważ ruch obiektu B jest ciągły, położenie obiektu B w punkcie E_6, po sześciu posunięciach liczonych przez gracza A, jest pozorne, gdyż w rzeczywistości będzie się on znajdował w którymś z sąsiednich węzłów siatki. Warunek zakończenia gry zostanie jednak spełniony, gdyż dla sąsiednich węzłów siatki, leżących na drodze przemieszczania się obiektów, spełniona jest równość $s = l$.

Rozpatrywana gra na pierwszy rzut oka wydaje się trywialna, ponieważ z warunku $V_A = 2V_B$ należy sądzić, że obiekt B zostanie zawsze przechwycony, o ile tylko gracz A postępować będzie rozumnie. W rzeczywistości tak nie jest, o czym świadczą trajektorie ruchów obiektów pokazane na ryc. 2 linią przerywaną przy tych samych punktach początkowych H_0 i E_0. Przy przyjętych w grze prostoliniowych strategiach chodowych gracza A, gracz B ma możliwość określenia takiego ciągu swoich strategii chodowych, przy którym nigdy nie będzie spełniony

warunek $s \leqslant l$. Gdy natomiast przyjąć dla gracza *A* taki układ strategii chodowych, jak to pokazano na ryc. 4, gracz *A* miałby zawsze możliwość przechwycenia obiektu *B* przy zachowaniu warunku $s \leqslant l$.

Scharakteryzowana wyżej gra ma wielkie znaczenie, gdyż zapoznaje nas z całą klasą gier wielochodowych opisujących procesy pościgu i zbliżania, które objęte problematyką cybernetyki technicznej w epoce lotów kosmicznych nabierają coraz większego znaczenia.



Ryc. 4

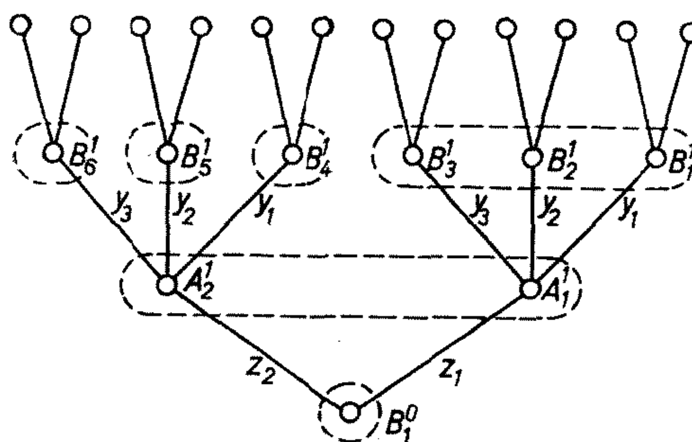
Gry z niepełną informacją

Z poprzedniego punktu wynika, że w grze wielochodowej z pełną informacją gracze zawsze wiedzą, w którym wierzchołku dendrytu znajduje się aktualnie powstała w grze sytuacja, tzn. mają kompletną informację o sytuacji. Jeżeli natomiast w grze wielochodowej choć jeden z graczy nie będzie mógł określić jednoznacznie sytuacji, która powstała w procesie realizacji gry, grę taką zaliczymy do gier z niepełną informacją.

Przyczyną tego, że gracz nie jest w stanie określić powstałej sytuacji najczęściej jest to, iż nie zna on poprzedzających tę sytuację ruchów swego przeciwnika, a ściśle mówiąc — wyborów dokonywanych w tych ruchach. Gra wielochodowa może charakteryzować się jednostronnym lub dwustronnym brakiem informacji. Oznacza to, że dla jednego z graczy gra może być z niepełną informacją, a dla drugiego gracza — z pełną informacją. Jeżeli np.

w grze „Samochód policyjny" uciekająca grupa przestępców nie będzie znała kolejnych położeń samochodu policyjnego, proces ucieczki będzie dla nich — tzn. dla gracza *B* — grą z niepełną informacją, pomimo że sam proces pościgu dla gracza *A* będzie w dalszym ciągu grą z pełną informacją.

Gra wielochodowa z niepełną informacją, podobnie jak gra z pełną informacją, również ma swój dendryt, jednakże w dendrycie tym wprowadza się dodatkowe oznaczenia związane z brakiem informacji. Przykład początkowego fragmentu dendrytu gry z niepełną informacją przedstawiony został na ryc. 5. Jak wiadomo, wierzchołki dendrytu określają sobą możliwe do powstania sytuacje w grze. W dendrycie gry z niepełną informacją te wierzchołki, które reprezentują sytuacje nierozróżnialne dla gracza w danym posunięciu, objęte są linią przerywaną tak, jak to pokazano na ryc. 5. Linia prze-



Ryc. 5

rywana oznacza po prostu, że na podstawie reguł gry gracz nie może powiedzieć, w którym spośród otoczonych tą linią wierzchołków się znajduje. Wierzchołki objęte linią przerywaną tworzą zbiór informacyjny. W dendrycie na ryc. 5 takim zbiorem

informacyjnym jest zbiór złożony z wierzchołków A^1_1 i A^1_2, przy czym jest to zbiór dwuelementowy. Jeżeli w dendrycie gry istnieje choć jeden zbiór informacyjny składający się co najmniej z dwóch wierzchołków, dendryt taki zawsze reprezentuje grę z niepełną informacją. Natomiast w przypadku, gdy w dendrycie występują wyłącznie zbiory informacyjne jednoelementowe, dendryt taki przedstawia grę z pełną informacją (por. ryc. 1).

Aby lepiej zrozumieć znaczenie zbiorów informacyjnych w dendrycie gry z niepełną informacją, prześledźmy przebieg takiej gry według dendrytu z ryc. 5. Wierzchołkiem początkowym dendrytu jest wierzchołek B^0_1 — wierzchołek ten stanowi jednoelementowy zbiór informacyjny. W sytuacji określonej wierzchołkiem B^0_1 rozpoczynający grę gracz B ma do wyboru strategię chodową z_1 lub z_2. W zależności od wyboru dokonanego przez gracza B w pierwszym jego ruchu sytuacja znajdzie się w wierzchołku A^1_1 lub A^1_2. Wierzchołki te, jak już wiadomo, tworzą zbiór informacyjny. Oznacza to, że sytuacje A^1_1 i A^1_2 są nierozróżnialne dla gracza A, mianowicie nie jest on zorientowany, w którym wierzchołku dendrytu znajduje się powstała sytuacja, gdyż nie wie on czy gracz B w swym pierwszym ruchu wykonał strategię chodową z_1 czy też z_2. Jeżeli w pierwszym posunięciu gracz B wykonał strategię chodową z_1, a gracz A strategię chodową y_1, to po pierwszym posunięciu gra znajdzie się w wierzchołku B^1_1. Ponieważ wierzchołek B^1_1 wraz z wierzchołkami B^1_2 i B^1_3 objęte są jednym zbiorem informacyjnym, tym razem gracz B nie będzie wiedział, w którym rzeczywiście wierzchołku dendrytu znajduje się powstała sytuacja. Oczywiście gracz B może pocieszyć się tym, że gracz A również w dalszym ciągu nie wie, którym wierzchołkiem dendrytu jest określona po-

wstała sytuacja. Powyższy przypadek zachodzi pod warunkiem, że żaden z graczy nie zna wyborów swego przeciwnika. Jeżeli natomiast w pierwszym posunięciu gracz *B* wykona strategię chodową z_2, a gracz *A* strategię chodową y_1, to sytuacja po pierwszym posunięciu określona będzie wierzchołkiem B^1_4. Ponieważ wierzchołek B^1_4 sam tworzy zbiór informacyjny, gracz *B* posiada pełną informację o ruchu swego przeciwnika, a tym samym wie, że sytuacja w grze określona jest wierzchołkiem B^1_4.

Dla zbiorów informacyjnych charakterystyczny jest pewien warunek konieczny, który powinny one spełniać. Mianowicie: liczba krawędzi wychodzących z każdego z wierzchołków przynależnych do jednego zbioru informacyjnego powinna być jednakowa dla wszystkich wierzchołków tego zbioru, przy czym każda krawędź wychodząca z dowolnego takiego wierzchołka powinna mieć swój odpowiednik w krawędziach wychodzących z pozostałych wierzchołków danego zbioru informacyjnego. Dla zbiorów A^1_1, A^1_2 i B^1_1, B^1_2, B^1_3 z ryc. 5 warunek ten jest w pełni spełniony.

Dla dendrytu gry z niepełną informacją możemy — podobnie jak w przypadku gry z pełną informacją — określić wszystkie możliwe strategie pełne graczy. Znając te strategie możemy przejść do postaci normalnej gry, tzn. możemy ułożyć macierz gry. Rozwiązując taką grę na podstawie macierzy gry określimy optymalne strategie gracza. Otóż tutaj okazuje się, że gra wielochodowa z niepełną informacją może nie mieć punktu siodłowego w obszarze strategii czystych, w odróżnieniu od gier z pełną informacją, które zawsze ten punkt mają. Gra wielochodowa z niepełną informacją może mieć tylko rozwiązanie w obszarze strategii mieszanych. Stąd też gdy gra taka opisuje proces jednorazowy, a gracze chcą

zastosować swoje optymalne strategie mieszane, wówczas optymalność stosowanych przez nich strategii chodowych będzie obarczona pewnym prawdopodobieństwem.

Gry wielochodowe z niepełną informacją są jeszcze w niedostatecznym stopniu opracowane w teorii gier, pomimo że spotykamy się z nimi bardzo często w różnych procesach i problemach decyzyjnych. W niniejszej książce ograniczymy się wyłącznie do gier wielochodowych z pełną informacją.

Gry z naturą

Dotychczas rozpatrywaliśmy tylko takie gry, w których interesy graczy są sobie przeciwstawne. W grach tych każdy z graczy zainteresowany jest wynikiem gry i w zależności od charakteru gry dąży do maksymalizacji lub minimalizacji wyniku. Obok tych gier istnieje niezmiernie ważna klasa gier dwuosobowych, w których charakterystyczne jest to, że jeden z graczy nie jest zainteresowany wynikiem gry. W ogólnym przypadku graczem nie zainteresowanym wynikiem gry jest natura. Stąd też gry, w których z jednej strony występuje gracz dążący do ściśle określonego celu — niekoniecznie nawet gracz rozumny — a z drugiej strony występuje natura, nazywamy grami z naturą lub też grami przeciw naturze. Zarówno postępowanie najdrobniejszego żywego organizmu w przyrodzie w odwiecznej walce o byt i zachowanie gatunku, jak i każde rozumne oddziaływanie człowieka na określone zjawiska w otaczającym go świecie można potraktować jako grę z naturą. Z tego też powodu gry z naturą stanowią najliczniejszą grupę gier. Jest po prostu rzeczą niemożliwą wyliczenie wszystkich przypadków

gier z naturą z powodu olbrzymiej skali rozpiętości między różnymi typami tych gier. Granice tej skali są mało uchwytne, gdyż i postępowanie mrówki w drodze do mrowiska, i działanie automatu na powierzchni nieznanej planety można opisać bardzo podobnymi do siebie modelami gry z naturą. Ponieważ większość procesów sterowania można opisać matematycznym modelem gry dwuosobowej z naturą, gry te odgrywają szczególnie ważną rolę w cybernetyce, a poprzez nią mają wpływ na rozwój innych nauk. Niestety gry te stanowią jeszcze prawie „białą plamę" w teorii gier; są w niedostatecznym stopniu poznane, co przy ogromnych możliwościach zastosowania tych gier jest zjawiskiem z pewnością bardzo niekorzystnym.

Rozpatrzmy teraz pewne właściwości gry z naturą. Pod pojęciem natury rozumie się w teorii gier gracza, który nie jest zainteresowany wielkością swojej wygranej lub przegranej, a tym samym nie postępuje zgodnie ze swoją strategią optymalną. Przeciwnikiem natury jest gracz dążący do uzyskania jak największej wygranej. Dalej będziemy zakładać, że przeciwnikiem natury jest gracz rozumny i oznaczać go będziemy symbolem A, natomiast naturę jako gracza oznaczać będziemy symbolem B. Ponieważ tendencje natury jako gracza B nie są przeciwstawne tendencjom gracza A, gra z naturą jest z zasady grą bez sumy zerowej.

Jednakże teoria gier, w sensie podanym przez von Neumanna, zakłada najbardziej ostrożną strategię postępowania graczy, która zapewnia im co prawda minimalną wygraną, lecz za to bez ryzyka. Stąd też gracz A prowadząc grę z naturą B powinien postępować możliwie najostrożniej, a więc — nie chcąc ryzykować — powinien liczyć się z możliwie najmniej sprzyjającą dla siebie grą partnera B, czyli przypisać

mu tendencje przeciwstawne do swoich. W wyniku takiego podejścia gra z naturą zostaje sprowadzona do gry wyraźnie antagonistycznej, a przez to samo do gry z sumą zerową. Uogólniając to rozumowanie można powiedzieć, że każda gra z naturą, w sensie teorii von Neumanna, powinna być potraktowana przez przeciwnika natury jako gra z sumą zerową.

Jednoznaczne podejście do gry, które — zgodnie z teorią von Neumanna — nakazuje postępować graczowi z największą ostrożnością, a tym samym każe traktować przeciwnika jako idealnego mistrza, skrytykowane zostało przez Norberta Wienera w uzupełnionym wydaniu jego książki *Cybernetyka czyli sterowanie i komunikacja w zwierzęciu i maszynie.* Wiener uzasadnił swoją krytykę tym, że bardzo często zachodzi konieczność pominięcia ostrożnego postępowania i stosowanie ryzyka, przy czym linia postępowania powinna opierać się na pewnych danych statystycznych dotyczących rozpatrywanego procesu opisanego grą.

Obecnie w teorii gier istnieją dwie metody podejścia do gier z naturą. Jedna z tych metod, oparta na teorii von Neumanna, wyklucza stosowanie ryzyka, a druga z tych metod uwypukla znaczenie ryzyka w procesie prowadzenia gry i pozwala na jego stosowanie. Wybór jednej lub drugiej metody podyktowany jest charakterem gry i zasobem informacji o postępowaniu natury. Drugą metodę stosuje się w zasadzie tylko wtedy, gdy na podstawie danych statystycznych znane są prawdopodobieństwa stosowanych przez naturę strategii. W takim przypadku gracz *A* będzie brał pod uwagę tylko te strategie natury, które występują z dużym prawdopodobieństwem. Oczywiście nie zawsze rozkład prawdopodobieństw strategii natury jest znany, przy czym, biorąc pod uwagę również i to, że nie zawsze wolno

nam ryzykować, wydaje się, że minimaksowa teoria von Neumanna jest dominująca w teorii gier wówczas, gdy rozpatrujemy gry z naturą.

Należy zwrócić uwagę, że większość gier z naturą opisuje procesy wieloetapowe, należy więc do gier wielochodowych wyrażanych graficznie przy pomocy dendrytu. Postać ekstensywna gier znacznie ułatwia analizę konkretnych gier z naturą. Dzięki istnieniu etapów w grze z naturą, gracz *A* ma możliwość modyfikowania stosowanych przez siebie strategii chodowych. Ponieważ w grze wielochodowej natura nie jest zainteresowana wysokością wygranej i swoje strategie chodowe stosuje w sposób losowy, popełnia błędy w procesie realizacji gry. Błędy te może wykorzystać gracz *A* w celu powiększenia swojej wygranej. Narzuca się więc wniosek, że gracz *A* nie potrzebuje znać swojej pełnej strategii optymalnej, gdyż chcąc maksymalizować swą wygraną musi zrezygnować ze stosowania w grze tej właśnie strategii. Stąd też gracz *A*, na podstawie analizy dendrytu gry, powinien zebrać takie dane, które umożliwiałyby mu prowadzenie gry z wykorzystywaniem błędów popełnianych przez gracza *B*. Z tych też względów dla każdej sytuacji powstałej w grze wielochodowej z naturą gracz *A* powinien mieć już z góry przygotowaną odpowiednią, optymalną strategię chodową, która — w wyniku następnych ruchów — zapewni mu uzyskanie najwyższej wygranej. Prowadzi to do jednostronnej optymalizacji dendrytu gry, która zostanie omówiona w następnym punkcie.

Metoda rozwiązywania gier wielochodowych

Podstawowym celem teorii gier jest opracowanie wskazówek do racjonalnego, optymalnego

postępowania dla każdej ze stron występujących w procesie opisanym modelem gry. Opracowanie takich wskazówek najczęściej jest sprowadzane do znalezienia rozwiązania gry przez określenie optymalnych strategii graczy oraz do wskazania minimaksowej wartości gry. Rozwiązanie gry polegające na wyznaczeniu optymalnych strategii graczy jest nie zawsze możliwe i nie zawsze przydatne, ponieważ większość konkretnych gier ma postać wielochodową i reprezentuje procesy wieloetapowe. Przebieg takich procesów wymaga bardzo często ciągłej modyfikacji strategii postępowania danego gracza w trakcie procesu reprezentującego grę wielochodową. Modyfikacji takiej nie zapewnia optymalna strategia pełna. Ponadto, aby rozwiązać grę, należy ją sprowadzić do postaci normalnej, tzn. należy ułożyć macierz gry. Jest to możliwe tylko dla bardzo prostych gier wielochodowych, w których każdy z graczy dysponuje niewielką liczbą strategii pełnych.

Dla większości gier wielochodowych — a ściśle mówiąc, dla procesów dających się opisać modelem gry wielochodowej — liczba strategii pełnych graczy jest tak olbrzymia, że uniemożliwia wprost ułożenie macierzy gry, a przez to samo rozwiązanie gry. Do trudności związanych z ułożeniem macierzy gry należy zaliczyć również i to, że samo określenie wszystkich strategii pełnych graczy jest bardzo często zadaniem nie do wykonania, nawet przy użyciu najbardziej nowoczesnych maszyn cyfrowych. Przykładem jest gra w szachy, dla której nie można jeszcze dotychczas wyznaczyć wszystkich optymalnych strategii pełnych graczy, pomimo że liczba tych strategii jest znana.

Załóżmy teraz, że pozbyliśmy się trudności związanych z ułożeniem macierzy gry, lub lepiej, że zawsze istnieją możliwości przejścia z postaci wielochodo-

wej gry na postać normalną i znalezienia rozwiązania. Znając rozwiązanie nie zawsze będziemy mogli z niego korzystać w procesie realizacji gry wielochodowej, co wynika z tego, że rozwiązując grę w okresie poprzedzającym jej realizację zakładamy najbardziej niekorzystny przypadek postępowania przeciwnika na wszystkich etapach gry. W rzeczywistości nasz przeciwnik może się nie trzymać swojej optymalnej strategii pełnej i może popełniać błędy w procesie realizacji gry. Błędy te powinniśmy wykorzystać w celu podwyższenia swej wygranej, a więc powinniśmy zarzucić postępowanie według optymalnej strategii pełnej, gdyż w trakcie realizacji gry dojdziemy do przekonania, że w wyniku zastosowania jakiejś innej strategii pełnej nasza wygrana byłaby znacznie wyższa. Ponadto należy zwrócić uwagę, że większość procesów opisywanych modelem gry wielochodowej należy do klasy gier z naturą. Natura, jak już wiemy, nie jest zainteresowana wynikiem gry, nie trzyma się swojej optymalnej strategii pełnej, gdyż swoje strategie chodowe wybiera losowo, a więc popełnia — z punktu widzenia gracza rozumnego — niedopuszczalne błędy.

Utwierdza to nas w przekonaniu, że rozwiązanie gry wielochodowej przez sprowadzenie jej do postaci normalnej i określenie optymalnych strategii pełnych obu graczy jest w ogólnym przypadku w praktyce mało przydatne.

Jakie więc powinno być racjonalne działanie każdego z graczy w grze wielochodowej, aby zapewniło mu możliwie największą wygraną i było działaniem optymalnym bez względu na to czy jego przeciwnik popełnia błędy, czy też gra rozumnie? Otóż sposób optymalnego postępowania gracza w grze wielochodowej z pełną informacją podyktowany jest specyfiką prowadzenia gry wielochodowej, a miano-

wicie tym, że na każdym etapie gry przy wyborze strategii chodowej gracz powinien uwzględnić wpływ dokonanego wyboru na dalszy przebieg gry. Zmuszony jest więc on przeanalizować wszystkie możliwe sytuacje, które mogą powstać w wyniku działania jego przeciwnika w następnych posunięciach i dopiero potem określić, czy dokonywany przez niego wybór jest dla niego optymalny. Jeżeli gracz nie przeprowadzi takiej analizy, to wybrana przez niego strategia chodowa — na pozór optymalna na danym etapie gry — może doprowadzić w ostatecznym wyniku do przegranej. Analiza taka w ogólnym przypadku jest bardzo złożona i należy ją przeprowadzić na podstawie dendrytu gry. Jak wiadomo, sytuacja powstała w grze jest jednoznacznie określona jednym z wierzchołków dendrytu, natomiast krawędzie wychodzące z tego wierzchołka reprezentują strategie chodowe tego gracza, na którego przypada ruch w tej właśnie sytuacji. Z kolei na każdej krawędzi, z wyjątkiem krawędzi ostatniego piętra dendrytu, jest zbudowany jak gdyby oddzielny dendryt, nazywany dendrytem składowym przyporządkowanym danej krawędzi. Aby stwierdzić czy wybierana w danej sytuacji strategia chodowa jest korzystna dla danego gracza, należy przeanalizować dendryt składowy przyporządkowany krawędzi opisanej tą strategią. Z wierzchołka dendrytu wychodzi na ogół kilka krawędzi, należy więc rozpatrzyć wszystkie krawędzie, stąd też liczba dendrytów składowych podlegających analizie jest taka sama, jak liczba krawędzi wychodzących z danego wierzchołka. Po przeprowadzeniu analizy wyboru strategii chodowej wyniki jej należy porównać i wybrać tylko jedną krawędź, najbardziej korzystną dla analizowanego wierzchołka dendrytu, natomiast pozostałe krawędzie — a tym samym przyporządkowane im dendryty

składowe — można z dendrytu gry wykreślić. W rezultacie dochodzimy do wniosku, że z punktu widzenia interesów danego gracza, po przeprowadzonej analizie całego dendrytu, z każdego wierzchołka opisanego symbolem tego gracza powinna wychodzić tylko jedna krawędź, i to taka, która reprezentuje optymalną dla danej sytuacji strategię chodową. Stąd też jeżeli chcemy np. określić optymalne postępowanie gracza *A*, to każdemu wierzchołkowi A^n_k dendrytu gry należy przyporządkować nie zbiór krawędzi, a tylko jedną krawędź opisaną taką strategią chodową, która po uwzględnieniu wszystkich następnych posunięć zagwarantuje graczowi *A* uzyskanie możliwie największej wygranej. Podobne rozumowanie można przeprowadzić również z punktu widzenia interesów gracza *B*.

Uwzględniwszy przeprowadzone wyżej rozważania można powiedzieć, że określenie optymalnego postępowania danego gracza w grze wielochodowej sprowadza się do jednostronnej optymalizacji dendrytu gry na korzyść danego gracza. Pod tym pojęciem rozumiemy proces wykreślenia z dendrytu niekorzystnych dla danego gracza jego strategii chodowych, a ściśle mówiąc krawędzi opisanych tymi strategiami. Jednostronną optymalizację dendrytu gry wykonuje się na korzyść jednego lub drugiego gracza. W trakcie jednostronnej optymalizacji dendrytu gry następuje redukcja dendrytu, tzn. zmniejszenie jego rozmiarów w wyniku wykreślenia niekorzystnych dla danego gracza krawędzi i zbudowanych na tych krawędziach dendrytów składowych.

Aby lepiej zrozumieć jednostronną optymalizację dendrytu gry, powróćmy do przykładu z krasnoludkami, które wycieczkę po gałęziach jabłoni potraktowały jako pewnego rodzaju grę. Przypom-

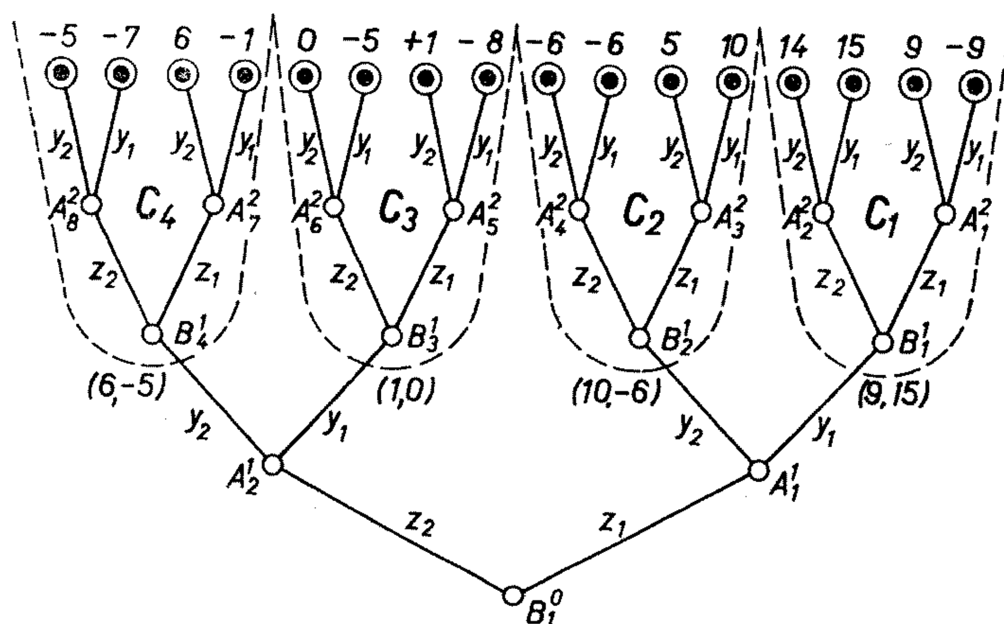
nijmy, że celem tej gry dla krasnoludka czarnego, reprezentującego gracza *A*, jest dojście do punktu jabłoni, w którym znajduje się możliwie największe jabłko. Natomiast celem gry dla krasnoludka białego — będącego graczem *B* i rozpoczynającego grę — jest doprowadzenie do tego, aby wygrana gracza *A* była jak najmniejsza. Gdy pewnego dnia krasnoludek biały zaproponował czarnemu powtórzenie wycieczki na tych samych zasadach, krasnoludek czarny postanowił ułatwić sobie grę. W tym też celu przeanalizował wszystkie możliwe dla siebie kierunki marszrut wzdłuż gałęzi jabłoni. Następnie poprosił kolegów o pomoc w obcinaniu niekorzystnych dla siebie gałęzi jabłoni.

Aby krasnoludek biały nie miał zastrzeżeń co do tego, iż w wyniku przerzedzenia korony jabłoni zostały zmniejszone jego szanse jako gracza *B*, krasnoludek czarny kazał poobcinać niekorzystne dla siebie gałęzie tylko przy tych rozgałęzieniach, w których on, jako gracz *A*, wybiera kierunek marszruty. Po przeprowadzonej naradzie czarne krasnoludki doszły do wniosku, że w celu zmniejszenia nakładu pracy nie potrzeba obcinać gałęzi we wszystkich tego typu rozgałęzieniach, lecz tylko w niektórych. Czy słuszna była decyzja czarnych krasnoludków dotycząca zmniejszenia nakładu pracy? — można się nad tym zastanowić.

W wyniku wykonanej przez czarne krasnoludki pracy przerzedzona korona drzewa jabłoni charakteryzowała się tym, że z każdego rozgałęzienia, w którym na gracza *A* przypadł obowiązek wyznaczenia kierunku marszruty, wychodziła tylko jedna gałąź. W ten sposób gracz *A* miał już z góry narzucony kierunek swego postępowania, eliminujący konieczność wyboru decyzji w trakcie prowadzenia gry, tj. w trakcie „wycieczki". Wszystkie powyższe

czynności, wykonane przez gracza A w celu wyeliminowania niekorzystnych dla siebie gałęzi w drzewie, składają się na proces jednostronnej optymalizacji dendrytu gry.

Jednostronna optymalizacja dendrytu gry jest na ogół procesem dość złożonym. Dla przykładu omówimy jednostronną optymalizację dendrytu gry na korzyść gracza A dla dendrytu przedstawionego na ryc. 6 (otrzymanego z ryc. 1 po wprowadzeniu dodatkowych symboli).



Ryc. 6

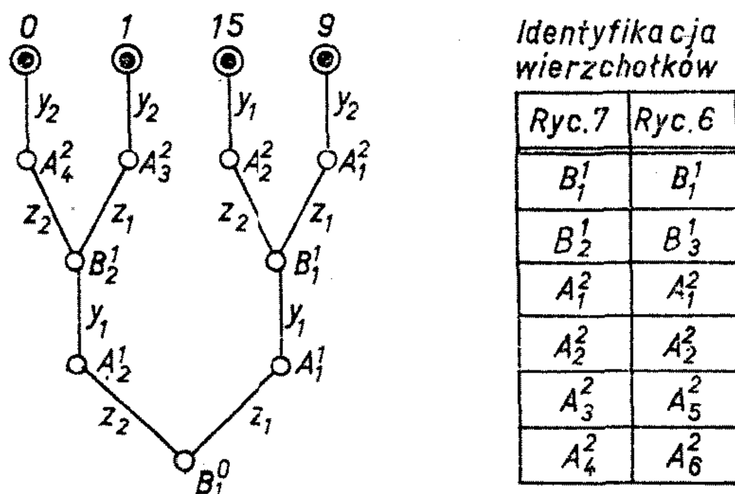
Jednostronną optymalizację dendrytu gry najłatwiej przeprowadzić rozpoczynając analizę dendrytu od pierwszego z prawej strony wierzchołka ostatniego piętra dendrytu. Dla dendrytu gry z ryc. 6 wierzchołek ten jest oznaczony symbolem A_1^2. Z wierzchołka A_1^2 wychodzą krawędzie y_1 i y_2, które reprezentują strategie chodowe gracza A. Jeżeli w sytuacji A_1^2 gracz A wybiera strategię chodową y_1, to wówczas przegrywa 9 punktów, co wynika z opisu

końcowego wierzchołka dendrytu, do którego doprowadza krawędź y_1. Jeżeli natomiast gracz A wybierze strategię y_2, to wygrywa 9 punktów. Oczywiste jest, że strategia chodowa y_1 jest niekorzystna dla gracza A i jako taka podlega wykreśleniu z dendrytu. Następnym podlegającym analizie wierzchołkiem jest wierzchołek A^2_2. Wychodzące z tego wierzchołka krawędzie y_1 i y_2 doprowadzają odpowiednio do wyników końcowych 15 i 14. W sytuacji A^2_2 strategia chodowa y_1 jest dla gracza A bardziej korzystna niż strategia chodowa y_2, gdyż zapewnia mu większą wygraną, dlatego też krawędź y_2 podlega wykreśleniu z dendrytu. Jak widać na ryc. 6, wierzchołki A^2_1 i A^2_2 wchodzą w skład dendrytu składowego C_1. Korzeniem tego dendrytu jest wierzchołek B^1_1 — przy wierzchołku tym zapisujemy wyniki końcowe gry, które gracz A ma zagwarantowane po znalezieniu się w sytuacji w wierzchołku B^1_1. Po przeprowadzonej jednostronnej optymalizacji dendrytu C_1 wyniki te określone są parą liczb (9, 15).

Kontynuując naszą analizę dochodzimy do wierzchołka A^1_1 dendrytu. Z wierzchołka tego wychodzą dwie krawędzie opisane strategiami chodowymi y_1 i y_2. Strategia chodowa y_1 doprowadza do wierzchołka B^1 i gwarantuje graczowi A wygraną 9 lub 15 punktów. Natomiast o zaletach strategii chodowej y_2 nie można na razie nic powiedzieć, gdyż przyporządkowany krawędzi y_2 dendryt składowy C_2 nie został jeszcze przeanalizowany. W dendrycie C_2 znajdują się wierzchołki A^2_3 i A^2_4. Analizując sytuację określoną wierzchołkiem A^2_3 dojdziemy do wniosku, że z dwóch krawędzi y_1 i y_2 wychodzących z tego wierzchołka krawędź y_1 jest bardziej korzystna dla gracza A niż krawędź y_2. Stąd też krawędź y_2 podlega wykreśleniu z dendrytu. Gorzej jest z oszacowaniem krawędzi wychodzących z wierzchołka A^2_4, gdyż

w tym przypadku strategie chodowe y_1 i y_2 doprowadzają do jednakowej przegranej gracza A. Zgodnie z zasadą jednostronnej optymalizacji dendrytu przy wierzchołku A^2_4 pozostawiamy tylko jedną krawędź, na przykład y_1. Po jednostronnej optymalizacji dendrytu C_2 wierzchołki końcowe tego dendrytu będą opisane: liczbą 10 dla krawędzi wychodzącej z wierzchołka A^2_3 i liczbą -6 dla krawędzi wychodzącej z wierzchołka A^2_4. Liczby te zapisujemy przy wierzchołku B^1_2, będącym korzeniem dendrytu C_2. Z zapisu tego wynika, że jeżeli gra znajdzie się w wierzchołku B^1_2, to gracz A musi liczyć się z tym, że może przegrać 6 punktów. Gracz A nie powinien więc dopuścić do powstania sytuacji określonej wierzchołkiem B^1_2. Stąd też spośród dwóch strategii chodowych y_1 i y_2, opisujących krawędzie wychodzące z wierzchołka A^1_1, gracz A powinien zawsze wybrać strategię chodową y_1 — a więc krawędź y_2 podlega wykreśleniu z dendrytu. Wraz z wykreśleniem krawędzi y_2 wykreślony zostanie dendryt składowy C_2. W analogiczny sposób przeprowadza się jednostronną optymalizację dendrytów składowych C_3 i C_4. Jej wynikiem będzie przyporządkowanie wierzchołkowi B^1_3 pary liczb (1, 0), a wierzchołkowi B^1_4 pary liczb (6, -5). Dendryt składowy C_3 jest więc bardziej korzystny dla gracza A niż dendryt C_4. Stąd też dendryt składowy C_4 jako mniej korzystny wraz z doprowadzającą do niego krawędzią y_2 podlega wykreśleniu z dendrytu gry. Końcowym rezultatem omówionego procesu jest jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry, który przedstawiony został na ryc. 7. Dendryt ten odzwierciedla optymalne postępowanie gracza A wobec stosowanych przez gracza B strategii chodowych. Zawiera znacznie mniejszą liczbę wierzchołków i krawędzi niż dendryt gry przed optymalizacją, co łatwo stwier-

dzić porównując ryciny 6 i 7. Dla ułatwienia tego porównania obok ryc. 7 została przedstawiona tabela, umożliwiająca identyfikację wierzchołków dendrytu z ryc. 7 z wierzchołkami dendrytu z ryc. 6.



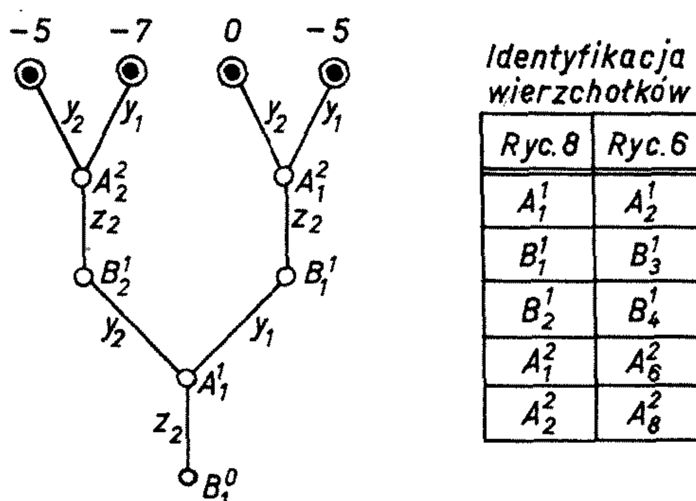
Ryc. 7	Ryc. 6
B^1_1	B^1_1
B^1_2	B^1_3
A^2_1	A^2_1
A^2_2	A^2_2
A^2_3	A^2_5
A^2_4	A^2_6

Ryc. 7

Scharakteryzujemy teraz jednostronną optymalizację dendrytu gry na korzyść gracza *B*, który dla dendrytu z ryc. 6 pierwszy rozpoczyna grę. W tym przypadku analizę dendrytu gry przeprowadza się, opierając na wierzchołkach typu B^n_k. Pierwszym wierzchołkiem podlegającym analizie jest wierzchołek B^1_1, będący korzeniem dendrytu C_1. Z wierzchołka tego wychodzą dwie krawędzie opisane strategiami chodowymi z_1 i z_2 gracza *B*. Oceniając te dwie strategie gracz *B* musi wziąć pod uwagę najbardziej niekorzystne dla siebie postępowanie gracza *A*. Stąd też, gdy gracz *B* wybierze strategię chodową z_1, może przegrać 9 punktów, natomiast gdy wybierze strategię chodową z_2, może przegrać 15 punktów. W sytuacji określonej wierzchołkiem B^1_1 strategia chodowa z_1 jest dla gracza *B* bardziej korzystna, gdyż gwarantuje mu mniejszą przegraną niż strategia chodowa z_2. Krawędź z_2

podlega więc wykreśleniu z dendrytu, a przy wierzchołku B^1_1 powinna być zapisana liczba 9 oznaczająca poziom bezpieczeństwa dla gracza B przy wyborze strategii chodowej z_1. Analizując w ten sam sposób pozostałe dendryty składowe C_2, C_3, C_4 i wykreślając z nich niekorzystne dla gracza B krawędzie, przy wierzchołkach B^1_2, B^1_3, B^1_4 jako wynik analizy zapiszemy odpowiednio liczby -6, 0, -5. Liczby te określają jednoznacznie gwarantowane wartości wygranej gracza B w sytuacjach B^1_2, B^1_3, B^1_4. Następnym etapem jednostronnej optymalizacji jest przesunięcie punktu analizy do wierzchołka B^0_1. Z wierzchołka tego wychodzą dwie krawędzie opisane strategiami chodowymi z_1 i z_2, w związku z czym należy określić, która z tych dwóch krawędzi jest bardziej korzystna dla gracza B. Krawędź opisana symbolem z_1 doprowadza do wierzchołka A^1_1 dendrytu. Ponieważ gracz B nie ma wpływu na działanie gracza A, musi się liczyć z tym, że w sytuacji A^1_1 gracz A zastosuje najbardziej niekorzystną strategię chodową y_1, przy której przegrana gracza B może wynieść 9 punktów. Liczba 9 określa więc poziom bezpieczeństwa dla gracza B przy wyborze przez niego strategii chodowej z_1 opisującej pierwszą krawędź wychodzącą z wierzchołka B^0_1. Przeprowadzając taką samą analizę dla drugiej krawędzi wychodzącej z wierzchołka B^0_1 i opisanej strategią chodową z_2, stwierdzamy, że przy wyborze tej strategii poziom bezpieczeństwa dla gracza B wynosi 0 punktów, tzn. gracz B nic nie przegrywa. Stąd też wynika, że krawędź z_2 wychodząca z wierzchołka B^0_1 jest bardziej korzystna niż krawędź z_1. Krawędź z_1 przyporządkowana wierzchołkowi B^0_1 jest ostatnią podlegającą wykreśleniu krawędzią dendrytu i przez jej wykreślenie kończy się proces jednostronnej optymalizacji dendrytu gry na korzyść gracza B.

Wynikiem końcowym tego procesu jest już jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry. Dendryt ten — przedstawiony na ryc. 8 — odzwierciedla optymalne postępowanie gracza *B* w funkcji stosowanych przez gracza *A* strategii chodowych.



Identyfikacja wierzchołków

Ryc. 8	Ryc. 6
A_1^1	A_2^1
B_1^1	B_3^1
B_2^1	B_4^1
A_1^2	A_6^2
A_2^2	A_8^2

Ryc. 8

W dalszych naszych rozważaniach będziemy się interesować wyłącznie jednostronną optymalizacją dendrytu gry na korzyść gracza *A*, a gracza *B* będziemy traktować najczęściej jako naturę. Kryteria jednostronnej optymalizacji dendrytu gry na korzyść gracza *A* mogą być różne, w zależności od charakteru gry i struktury reprezentującego ją dendrytu. Można wyróżnić następujące rodzaje jednostronnej optymalizacji dendrytu gry:

a) ze względu na maksymalną wartość wygranej,
b) ze względu na minimalną liczbę posunięć w grze,
c) ze względu na maksimum wygranej i minimum posunięć w grze.

Inny możliwy podział jest uwarunkowany liczbą strategii pełnych, będących w dyspozycji każdego z graczy. Stąd też wyróżnia się jednostronną opty-

malizacęj dendrytu gry o małej liczbie strategii, którą można przeprowadzić odręcznie, oraz jednostronną optymalizację dendrytu gry o dużej liczbie strategii, do której przeprowadzenia należy wykorzystać maszynę cyfrową. Bez względu na zastosowane kryterium optymalizacji i sposób jej przeprowadzenia, jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry przedstawia zawsze taki rodzaj gry, w której dany gracz ma z góry narzucone sobie optymalne strategie postępowania i w grze nie dokonuje wyboru.

Jednostronna optymalizacja dendrytu gry o dużej liczbie strategii

Jednostronna optymalizacja dendrytu gry wielochodowej o dużej liczbie strategii jest procesem złożonym i może być dokonana tylko przy pomocy maszyny cyfrowej. Zanim przystąpimy do scharakteryzowania tej optymalizacji, przedstawiony zostanie pewien analityczny opis struktury dendrytu przy użyciu odpowiednich zbiorów, zawierających elementy występujące w opisie krawędzi dendrytu. Odpowiednie opisanie struktury dendrytu bardzo ułatwia określenie przez maszynę cyfrową algorytmu jednostronnej optymalizacji dendrytu gry.

Pojęcie algorytmu należy do podstawowych pojęć w matematyce. Przez algorytm rozumie się dokładny przepis wykonania w określonym porządku pewnego układu operacji w celu rozwiązania wszystkich zagadnień pewnego określonego typu. Najprostszymi algorytmami są przepisy, przy pomocy których wykonuje się to lub inne spośród czterech działań arytmetycznych w dziesiętnym systemie liczenia, np. przepis dotyczący dzielenia liczb. Algorytmem możemy nazywać przepis dotyczący sposobu

rozwiązania dowolnie złożonego zadania matematycznego. Zastosowanie algorytmu prowadzi w skończonej liczbie kroków (czynności) od danych wyjściowych do wyników końcowych. Z teoretycznego punktu widzenia nie jest istotne, czy dane wyjściowe i wyniki są liczbami; danymi i wynikami mogą być również dowolne inne symbole abstrakcyjne. Jeżeli dany problem lub dane zadanie matematyczne ma być rozwiązane przez maszynę cyfrową, to w treści przepisu rozwiązania tego problemu lub też zadania są uwzględniane pewne właściwości działania maszyny cyfrowej. W tym przypadku przepis taki nazwiemy algorytmem rozwiązania danego problemu na maszynie cyfrowej. Algorytm taki jest podstawą do opracowania programu już dla konkretnej maszyny cyfrowej, przeznaczonej do rozwiązania danego problemu.

Jak już wiadomo, zbiór strategii chodowych gracza B w grze wielochodowej jest określony postacią (p. wzór 3.2)

$$Z = \{z_1, z_2. ..., z_j, ..., z_s\}$$

Elementy tego zbioru opisują krawędzie wychodzące z wierzchołków B_k^n dendrytu. W ogólnym przypadku dendryt gry składa się z kilku pięter, a strategie chodowe opisujące krawędzie poszczególnych pięter mogą się znacznie między sobą różnić. Stąd też dogodnie jest podzielić zbiór Z na podzbiory strategii chodowych dopuszczalnych do wykorzystania w poszczególnych piętrach dendrytu, tzn. dopuszczalnych w poszczególnych posunięciach w grze. Po dokonaniu takiego podziału zbiór Z przyjmie następującą postać

$$Z = \{Z^1, Z^2, ..., Z^n, ..., Z^m\} \qquad (3.3)$$

gdzie: n — numer piętra dendrytu, m — najwyższe piętro dendrytu. gry.

Dowolny element Z^n tego zbioru jest jednocześnie jego podzbiorem zawierającym takie elementy z_j, tzn. takie strategie chodowe gracza *B*, które mogą wystąpić w *n*-tym posunięciu i opisują krawędzie *n*-tego piętra dendrytu. Podzbiór $Z^n \subset Z$ jest więc zbiorem o postaci

$$Z^n = \{z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_r}, \ldots, z_{j_s}\} \tag{3.4}$$

gdzie indeksy j_r są pewnymi liczbami całkowitymi przynależnymi do zbioru indeksów opisujących elementy z_j zbioru Z zadanego wyrażeniem (3.2).

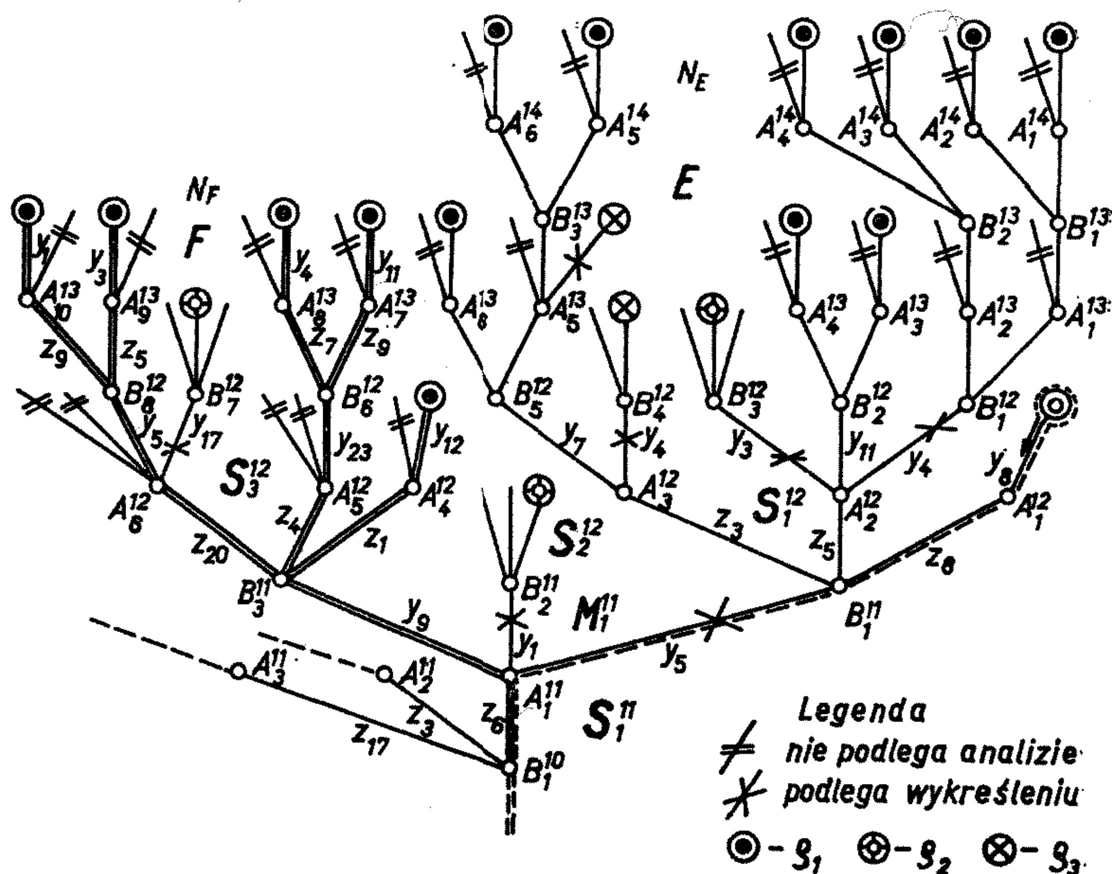
Z kolei zbiór Z^n możemy również podzielić na pewne podzbiory uwarunkowane strukturą *n*-tego piętra dendrytu. Analizując dendryt gry łatwo zauważyć, że elementy z_j opisujące krawędzie wychodzące z dowolnego wierzchołka B_k^{n-1} dendrytu określają zbiór dopuszczalnych strategii chodowych gracza *B* w sytuacji określonej wierzchołkiem B_k^{n-1}. Zbiór taki oznaczymy symbolem S_k^n i opiszemy następująco

$$S_k^n = \{z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_s}\} \tag{3.5}$$

gdzie indeksy k_s przynależne są do zbioru indeksów opisujących elementy zbioru Z^n. Uwzględniając wszystkie zbiory typu S_k^n w *n*-tym piętrze dendrytu, zbiór Z^n można przedstawić jako następującą sumę zbiorów

$$Z^n = S_1^n \cup S_2^n \cup \ldots \cup S_{kn}^n \cup \ldots \cup S_{ln}^n \tag{3.6}$$

gdzie l_n — maksymalna liczba wierzchołków B_k^{n-1} znajdujących się na pierwszym poziomie *n*-tego piętra dendrytu. Dla orientacji, na ryc. 9 przedstawiono wykorzystanie zbiorów S_k^n w opisie dendrytu gry przed optymalizacją.



Ryc. 9

W analogiczny sposób możemy przeprowadzić podział zbioru strategii chodowych gracza A. Zbiór strategii chodowych gracza A zadany jest postacią (p. wzór 3.1)

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_w\}$$

Uwzględniając poszczególne piętra dendrytu, zbiór Y możemy przedstawić również w postaci jako

$$Y = \{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n, \ldots, Y^m\} \qquad (3.7)$$

gdzie Y^n zawiera elementy y_i z n-tego piętra dendrytu.

W dendrycie gry przed optymalizacją z każdego wierzchołka A_k^n dendrytu wychodzi zbiór krawędzi opisanych różniącymi się między sobą strategiami chodowymi gracza A. Zbiór ten ma postać

$$M_k^n = \{y_{r_1}, y_{r_2}, \ldots, y_{r_c}\} \qquad (3.8)$$

Stąd też dowolny zbiór typu Y^n możemy przedstawić jako następującą sumę zbiorów

$$Y^n = M_1^n \cup M_2^n \cup \ldots \cup M_{kn}^n \cup \ldots \cup M_n \qquad 3.9)$$

Przedstawione wyżej zbiory typu S_k^n i M_k będą nam pomocne przy opisie procesu jednostronnej optymalizacji dendrytu gry przy pomocy maszyny cyfrowej. Jak wiadomo, maszyna cyfrowa może rozwiązać dany problem wtedy, gdy problem ten został odpowiednio sformalizowany i znany jest algorytm rozwiązania danego problemu.

Na podstawie algorytmu rozwiązania danego problemu układa się dla maszyny cyfrowej program obliczeń, zgodnie z którym realizuje ona proces obliczeń. W przypadku jednostronnej optymalizacji dendrytu gry zarówno algorytm, jak i program opracowywane są ściśle na podstawie reguł prowadzenia tej gry, której dendryt ma być optymalizowany przez maszynę cyfrową. Omówienie takiego algorytmu, a tym bardziej programu, nawet na poziomie bardzo ogólnym, wykracza poza ramy niniejszej książki. Załóżmy więc, że realizując jednostronną optymalizację dendrytu gry, maszyna cyfrowa działa zgodnie z odpowiednim programem zawartym w jej pamięci oraz dysponuje wszelkimi danymi do przeprowadzenia tej optymalizacji. Ponadto dla uproszczenia naszych rozwiązań załóżmy również, że rozpatrujemy taką grę wielochodową, która ma trzyelementowy zbiór wyników końcowych

$$R = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$$

Zbiór ten obejmuje odpowiednio wygraną gracza A (symbol ρ_1), wygraną gracza B (symbol ρ_2) oraz

remis, odpowiadający punktowi siodłowemu gry (symbol ρ_3). Możliwy fragment dendrytu takiej gry przedstawiony został na ryc. 9.

Wstępnym etapem jednostronnej optymalizacji dendrytu gry jest osiągnięcie jednego z wierzchołków końcowych dendrytu, tj. zbudowanie pierwszej ścieżki dendrytu. Ścieżka taka charakteryzuje pewną fikcyjną partię gry rozegraną przez elektroniczną maszynę cyfrową w celu uzyskania jednego z możliwych wyników końcowych gry. Zgodnie z ryc. 9 wierzchołek końcowy pierwszej ścieżki dendrytu wskazuje na wygraną gracza A. Właściwy proces optymalizacji zapoczątkowany jest cofnięciem się od wierzchołka końcowego do najbliższego wierzchołka typu B, tj. B_1^{11}.

Z wierzchołka B_1^{11} wychodzą trzy krawędzie, z których każda opisana jest elementem z_j przynależnym do pewnego zbioru S_1^{12} zawierającego wszystkie możliwe do wykonania strategie chodowe gracza B w sytuacji opisanej wierzchołkiem B_1^{11}. Zbiór S_1^{12} maszyna cyfrowa kompletuje sobie sama, według zadanego jej algorytmu optymalizacji dendrytu i reguł prowadzenia gry. W interpretacji maszyny cyfrowej każdy element $z_j \in S_1^{12}$ jest krawędzią wychodzącą z wierzchołka B_1^{11}. Wraz z kompletowaniem zbioru S_1^{12} następuje jego analiza. Sprowadza się ona do sprawdzenia, czy w zbiorze krawędzi wychodzących z wierzchołka B_1^{11} znajduje się choć jedna taka krawędź, która bezpośrednio doprowadza do wierzchołka końcowego dendrytu. Jeżeli tak, wówczas sytuacja określona wierzchołkiem B_1^{11} jest niekorzystna dla gracza A. Stąd też, aby do niej nie dopuścić, należy wykreślić z dendrytu krawędź łączącą wierzchołek B_1^{11} z wierzchołkiem A_1^{11}, a następnie przystąpić do analizy pozostałych krawędzi zbioru M_1^{11}.

Jeżeli natomiast w wyniku analizy zbioru S_1^{12} okaże się, że żadna z krawędzi tego zbioru nie doprowadza bezpośrednio w posunięciu $n = 12$ do wierzchołka końcowego, to zostanie wykonany ruch wzdłuż drugiej krawędzi zbioru S_1^{12} i analiza zostanie przesunięta do wierzchołka A_2^{12}. Właśnie taki przypadek zilustrowany jest na ryc. 9. Dalszy proces optymalizacji przebiega podobnie.

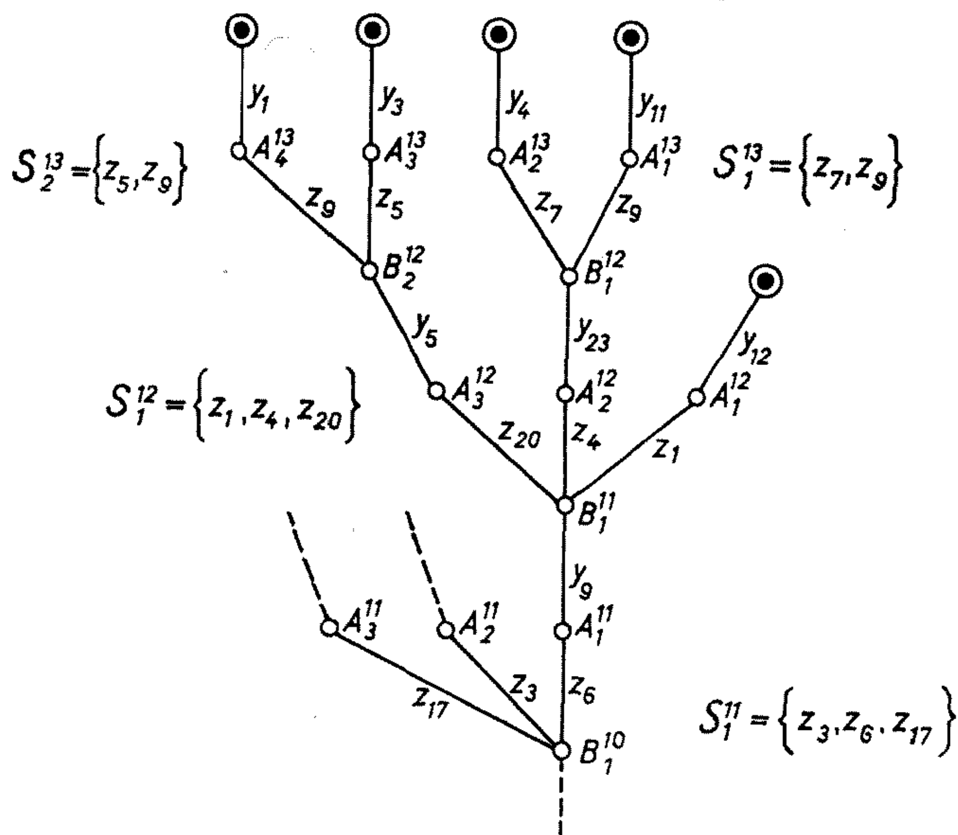
Jak wiadomo, podstawowym warunkiem optymalizacji jest to, aby z dowolnego wierzchołka typu A_k^n jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry wychodziła tylko jedna krawędź. Stąd też, po uzyskaniu dwóch jednostronnie zoptymalizowanych fragmentów dendrytu, zbudowanych na dwóch krawędziach wychodzących z tego samego wierzchołka typu A_k^n, jeden z tych fragmentów należy odrzucić jako niekorzystny dla gracza A. Możliwym do przyjęcia kryterium odrzutu jest określenie dla każdego zoptymalizowanego fragmentu dendrytu maksymalnej liczby posunięć N, przy których pomocy w trakcie realizacji gry zostałby osiągnięty najwyżej położony wierzchołek końcowy w interesującym nas fragmencie dendrytu. Z przedstawionych na ryc. 9 dwóch fragmentów dendrytu, oznaczonych przez E i F, fragment F jest bardziej korzystny dla gracza A, gdyż $N_E > N_F$.

W procesie jednostronnej optymalizacji dendrytu gry niektóre jego części składowe nie są w ogóle rozpatrywane, a mianowicie te, które normalnie byłyby zbudowane na krawędziach określonych w wyniku analizy jako niekorzystne dla gracza A.

Przedstawienie pełnego algorytmu jednostronnej optymalizacji dendrytu gry wykracza poza ramy niniejszego rozdziału. Stąd też przedstawionej powyżej krótkiej charakterystyki nie należy uogólniać do całego procesu optymalizacji, w którym istotne

jest uwzględnienie wszystkich możliwych przypadków uwarunkowanych strukturą dendrytu.

Pewną ilustrację rezultatów uzyskiwanych w wyniku jednostronnej optymalizacji dendrytu gry daje porównanie rycin 9 i 10. Dendryt przedstawiony na



Ryc. 10

ryc. 10 został uzyskany w wyniku jednostronnej optymalizacji dendrytu gry z ryc. 9 i, jak to wynika z porównania rysunków, zawiera znacznie mniejszą liczbę krawędzi i wierzchołków.

Minimalizacja jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry

Jednostronnie zoptymalizowany na korzyść gracza *A* dendryt gry jednoznacznie określa optymalne postępowanie tego gracza w procesie realizacji gry.

Aby gracz *A* mógł prowadzić grę zgodnie z jednostronnie zoptymalizowanym dendrytem gry, musiałby mieć przed sobą rysunek tego dendrytu lub musiałby pamiętać wszystkie jego ścieżki. Zarówno jedno, jak i drugie jest najczęściej niemożliwe. Bardziej realne i praktyczne jest korzystanie z zestawu tablic zawierających odpowiedni zapis wszystkich ścieżek jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Jednakże najbardziej nowoczesnym podejściem — szczególnie istotnym w procesach sterowania — jest zastąpienie gracza *A* automatem, który zdolny byłby do zapamiętania jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry i do prowadzenia gry zgodnie z konfiguracją ścieżek tego dendrytu. Automatem tym może być maszyna cyfrowa (komputer) lub specjalnie do tego celu zbudowany automat rozgrywający (por. rozdz. 5). W przypadku wykorzystania maszyny cyfrowej jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry zapamiętany byłby w jej pamięci. W przypadku automatu rozgrywającego jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry zawarty by był w strukturze tego automatu, tzn. struktura automatu byłaby pewnym fizycznym modelem tego dendrytu.

W obu przypadkach zachodzi konieczność zmniejszenia rozmiarów jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Zmniejszyć rozmiary dendrytu znaczy — tak go zredukować, aby przy zmniejszonych rozmiarach zachował on te same właściwości. Proces związany ze mniejszeniem rozmiarów jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry nosi nazwę minimalizacji. Celem minimalizacji jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry jest zmniejszenie liczby jego krawędzi i wierzchołków przez pokrycie się pewnych, tzw. izomorficznych części składowych dendrytu.

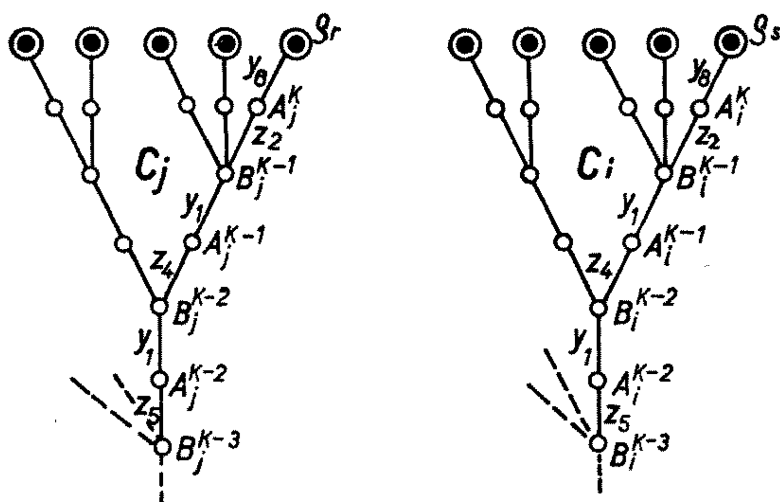
Pojęcie izomorfizmu jest jednym z ciekawszych pojęć w matematyce. Spotykamy się z nim wtedy, kiedy zachodzi konieczność ustalenia pewnej określonej równoważności (odpowiedniości), występującej między elementami dwóch różnych układów.

Rozpatrywane układy nazywa się izomorficznymi, jeżeli mają postać jednakową z interesującego nas punktu widzenia. Gdy określona odpowiedniość między układami nie jest spełniona, wówczas układy są nieizomorficzne względem siebie. Na przykład mapa pewnego terenu i sam teren są układami izomorficznymi ze względu na formę rzeźby terenu. Rzeki, jeziora, pola, łąki, występujące w terenie, mają na mapie swoje odpowiedniki w postaci symbolicznych znaków. Jednak wtedy, gdy uwzględnimy takie cechy terenu, jak zapach kwitnących łąk, kolor wody w jeziorach, piękno krajobrazu, oba układy nie są izomorficzne, ponieważ na mapie brak odpowiedników tych cech. Podobnie dwa grafy, na przykład dwa dendryty, są izomorficzne wtedy, gdy mają jednakową strukturę — jednak izomorfizm ten dotyczy tylko struktury dendrytów i może nie być spełniony przy określaniu odpowiedniości między zbiorami symboli opisujących krawędzie obu dendrytów.

Pojęcie izomorfizmu jest bardzo przydatne w zagadnieniach związanych z minimalizacją jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Analizując jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry można stwierdzić, że niektóre jego części składowe mają jednakową strukturę i są opisane taką samą kombinacją elementów z_j, y_i. Wśród tych części składowych możemy wyróżnić takie, które mają postać dendrytów składowych, tzn. mają obowiązkowo swój wierzchołek początkowy i wierzchołki

końcowe, nie licząc wierzchołków leżących na innych poziomach.

Dendryty składowe charakteryzujące się wymienionym wyżej podobieństwem — tzn. podobieństwem struktury i opisu — noszą nazwę w pełni izomorficznych względem siebie dendrytów składowych. W pełni izomorficzne względem siebie den-

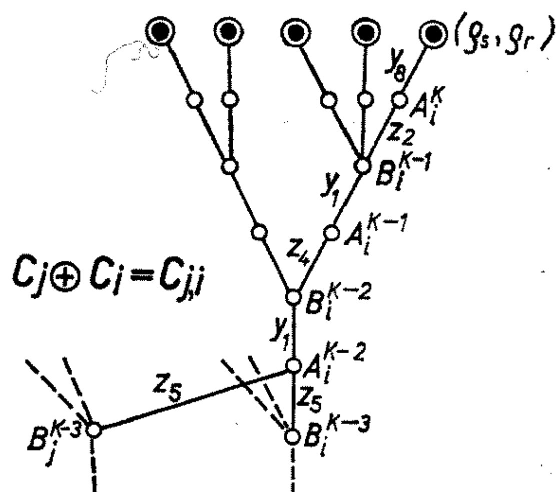


Ryc. 11

dryty składowe, wchodzące w skład danego jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry, można na siebie nałożyć. W ten sposób kilka izomorficznych dendrytów składowych zostaje sprowadzonych do jednego dendrytu składowego. Dla ilustracji tego zagadnienia na ryc. 11 przedstawiono dwa w pełni izomorficzne względem siebie dendryty składowe C_j i C_i, leżące na jednakowym poziomie pewnego jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Oba dendryty składowe, przedstawione na ryc. 11, mają jednakową strukturę, przy czym są opisane jednakową kombinacją elementów z_j, z_i — chociaż dla przejrzystości rysunku pokazano opis tylko jednej ścieżki, zakładając, że pozostałe odpowiadające sobie ścieżki obu dendrytów w niczym się między

sobą nie różnią. W wyniku nałożenia na siebie obu dendrytów C_i i C_j uzyskuje się jeden dendryt składowy $C_{j,i}$. Dendryt ten pokazano na ryc. 12, oznaczając umownie operację nałożenia dendrytów symbolem $+$.

Dendryt składowy $C_{j,i}$ odzwierciedla w dalszym ciągu te same właściwości, którymi charakteryzowały się dendryty C_j i C_i, a w strukturze jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry jest zminimalizowaną częścią składową tego dendrytu. Z ryc. 12 wynika, że w otrzymanym w wyniku minimalizacji dendrycie składowym $C_{j,i}$ znajdują się jak gdyby dwa korzenie tego dendrytu, którymi są wierzchołki B_j^{k-3} i B_i^{k-3}. Jeżeli w procesie prowadzenia gry powstanie sytuacja określona wierzchołkiem B_j^{k-3} lub B_i^{k-3}, a gracz B zastosuje strategię chodową z_5, to zgodnie z dendrytem $C_{j,i}$ gracz A — lub reprezentujący go automat — wykona strategię chodową y_1 i gra potoczy się dalej zgodnie z dendrytem $C_{j,i}$ tak, jak gdyby to był dendryt C_j czy też C_i. W sytuacji określonej wierzchołkiem B_j^{k-3} lub B_i^{k-3} nie ma żadnej różnicy w prowadzeniu gry czy to według dendrytów C_j, C_i, czy też według dendrytu zminimalizowanego $C_{j,i}$.



Ryc. 12

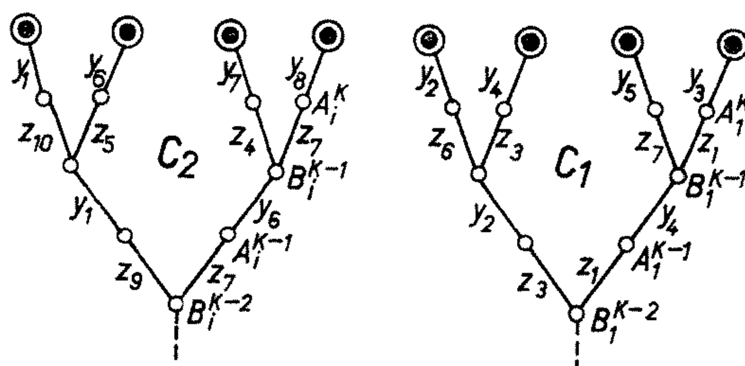
Bardzo często w pełni izomorficzne względem siebie dendryty składowe mogą znajdować się na różnych poziomach jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Na przykład dendryt składowy C_i

z ryc. 11 może mieć swój korzeń, tzn. swój wierzchołek początkowy, w piętrze $n = 6$, a izomorficzny dendryt składowy C_j może mieć swój korzeń w piętrze $n = 9$. Również te dendryty można ze sobą pokryć po odpowiednim przesunięciu dendrytu C_i o trzy piętra. A więc w pełni izomorficzne dendryty składowe, wyróżnione w jednostronnie zoptymalizowanym dendrycie gry, podlegają wzajemnemu pokryciu bez przesunięcia dendrytów względem siebie lub też po odpowiednim ich przesunięciu. Po dokonaniu wszystkich możliwych takich pokryć zmniejszone zostaną rozmiary jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry, co znacznie ułatwia zapamiętanie tego dendrytu w pamięci maszyny cyfrowej czy też w strukturze automatu rozgrywającego.

Metody minimalizacji jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry mogą być bardzo różne i zależą zarówno od struktury dendrytu, jak i od jego opisu. Nie zawsze w jednostronnie zoptymalizowanym dendrycie można wyróżnić w pełni izomorficzne dendryty składowe. Nierzadko dendryty składowe są izomorficzne pod względem struktury, a nie są izomorficzne pod względem opisujących je elementów z_j, y_i — i noszą wtedy nazwę częściowo izomorficznych. Jeżeli co najmniej dwa dendryty składowe mają taką samą strukturę, lecz opisane są inną kombinacją elementów z_j, y_i, to mogą być nałożone na siebie po określeniu zachodzących relacji pomiędzy odpowiadającymi sobie elementami z_j, y_i w tych dendrytach. Dla ilustracji tego zagadnienia na ryc. 13 przedstawiono dwa izomorficzne pod względem struktury dendryty składowe C_1 i C_2.

Wierzchołki początkowe obu dendrytów składowych znajdują się na jednakowym poziomie jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Dla ułatwienia minimalizacji każdemu z dendrytów przy-

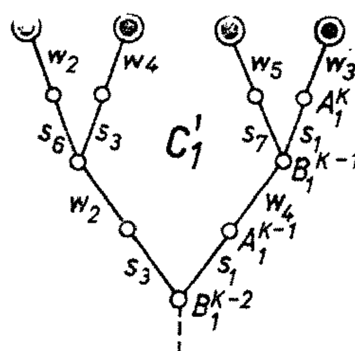
porządkowuje się pewien parametr p, np. dendrytowi C_1 przyporządkowuje się parametr p_1, a dendrytowi C_2 parametr p_2.



Ryc. 13

Po takim przyporządkowaniu parametrów jeden z dendrytów potraktować można jako dendryt odniesienia, względem którego przeprowadzona będzie minimalizacja. W dendrycie odniesienia wprowadza się następujące oznaczenia elementów: $y_i = w_i$ oraz $z_j = s_j$.

Załóżmy, że dendrytem odniesienia jest dendryt C_1. Po wprowadzeniu oznaczeń $y_i = w_i$ i $z_j = s_j$, uzyskamy pewien dendryt zastępczy, który, oznaczony umownie symbolem C'_1, przedstawiony został na ryc. 14. Dendryt zastępczy C'_1 reprezentuje zarówno dendryt C_1, jak i C_2. Zależność między elementami y i z dendrytu C_1, a elementami w i s dendrytu C'_1 jest następująca



Ryc. 14

$$z_1 = s_1,\ z_3 = s_3,\ y_2 = w_2,\ y_4 = w_4 \text{ itd.}$$

Natomiast zależność między elementami dendrytu C_2 a elementami dendrytu C'_1 wygląda już nieco inaczej,

gdyż

$$z_9 = s_3,\ z_7 = s_1,\ z_4 = s_7,\ z_{10} = s_6,$$
$$y_6 = w_4,\ y_1 = w_2,\ y_7 = w_5,\ y_8 = w_3$$

Symbole s i w przedstawiają jak gdyby pewne fikcyjne strategie chodowe obydwu graczy. Ponieważ dendryt C'_1 reprezentuje dwa dendryty C_1 i C_2, zachodzi konieczność przeprowadzenia w procesie realizacji gry identyfikacji rzeczywistych strategii chodowych graczy ze strategiami fikcyjnymi, opisującymi dendryt zastępczy C'_1. Do identyfikacji tej potrzebne są wprowadzone wyżej parametry p_1 i p_2. Jeżeli np. gracz A dysponuje jednym dendrytem C'_1 zamiast dwóch dendrytów C_1 i C_2, to po znalezieniu się gry w sytuacji określonej wierzchołkiem B_1^{k-2} musi on otrzymać informację o aktualnym parametrze p. Gdy zna ten parametr p, tj. $p = p_1$ lub $p = p_2$, łatwo może przejść na rzeczywisty układ strategii chodowych przez zmianę elementów s i w dendrytu C'_1 na odpowiednie elementy z i y.

Omówione w niniejszym punkcie dwie metody minimalizacji jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry — zresztą omówione bardzo pobieżnie — sygnalizują w zasadzie tylko istnienie problemu minimalizacji dendrytu. W ogólnym przypadku minimalizacja jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu jest problemem złożonym i niedostatecznie jeszcze opracowanym. Ze względu na złożoność tego problemu, jego rozwiązanie w większości konkretnych gier opisujących procesy sterowania opiera się na wykorzystaniu maszyn cyfrowych.

Gry wielochodowe parametryczne

Dotychczas rozpatrywaliśmy takie gry wielochodowe, w których wyróżnia się tylko jedną sytuację

początkową gry. Pewnym uogólnieniem tych gier jest gra w szachy, charakteryzująca się m.in. tym, że występuje w niej jedna sytuacja początkowa, określona przez początkowe położenie figur na szachownicy poprzedzające pierwszy ruch „białych". Wiadomo powszechnie, że początkowe ugrupowanie figur na szachownicy jest ściśle określone i nie podlega przed rozpoczęciem gry żadnym zmianom, bez względu na to, ile razy grę tę będziemy rozgrywać. Wyłącznie jedna sytuacja początkowa istnieje także w grze w warcaby oraz w innych grach. Dendryty tych gier mają tylko jeden wierzchołek początkowy.

Nie zawsze jednak w grze wielochodowej istnieje tylko jedna sytuacja początkowa gry. Wynika to z tego, że gra z reguły opisuje pewien proces, a stany początkowe procesu mogą być różne. Na przykład operacja bojowa wojsk, biorących udział w konflikcie wojennym, może rozpocząć się przy różnym ugrupowaniu bojowym obu przeciwstawnych sobie stron. W zależności od sytuacji początkowej, charakteryzującej się m.in. przyjętym ugrupowaniem bojowym, gra opisująca proces prowadzenia operacji bojowej będzie miała taki lub inny przebieg. W procesie tego typu występuje więc dość znaczna liczba stanów początkowych; taką samą liczbę sytuacji początkowych będzie miała gra opisująca ten proces. Dla ilustracji tego zagadnienia wróćmy do omawianej już (s. 66) w przykładzie 3 gry, którą rozpatrywano tam z punktu widzenia tylko jednego położenia początkowego obiektów: *A* — samochodu policyjnego i *B* — samochodu przestępców. Jednakże liczba początkowych położeń obiektów może być bardzo duża, a w przypadku nieograniczonej płaszczyzny pościgu jest liczbą nieskończoną. Każde położenie początkowe obiektów *A* i *B* z ryc. 2 jest sytuacją początkową gry. Ponieważ każde możliwe

położenie obiektów względem siebie może być położeniem początkowym, liczba sytuacji początkowych w grze opisującej wymieniony proces pościgu będzie bardzo duża. W interpretacji graficznej każda sytuacja początkowa w grze wielochodowej jest wierzchołkiem początkowym dendrytu gry. Dendrytów będzie więc tyle, ile jest wierzchołków początkowych, tzn. tyle, ile jest sytuacji wyjściowych w grze.

Uzyskamy więc całą rodzinę dendrytów, z których każdy opisuje tę samą grę, jednakże przy innej sytuacji początkowej. Kompletny dendryt takiej gry — przy skończonej liczbie sytuacji początkowych — jest więc zbiorem dendrytów, określonym przez wyrażenie

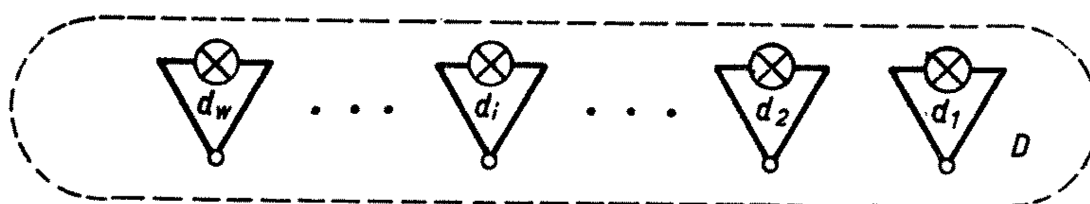
$$D = \{d_1, d_2, ..., d_i, ..., d_w\} \qquad (3.10)$$

gdzie d_i — dendryt przyporządkowany i-tej sytuacji początkowej. Sytuacje początkowe gry, w celu odróżnienia ich od siebie, można ponumerować liczbami całkowitymi lub przyporządkować im umowne symbole $p_1, p_2, ..., p_i, ...$.

Wielkości te, przeznaczone do identyfikacji sytuacji początkowych, noszą nazwę parametrów gry, a ich wyraz ogólny oznaczać będziemy symbolem p. W zależności od wartości parametru p gra jest reprezentowana odpowiednim dendrytem ze zbioru D. Z tych też powodów indeksy opisujące parametry gry $p = p_1, p_2, ..., p_i, ...$ odpowiadają indeksom opisującym elementy d_i zbioru D.

Ze względu na pojęcie parametru gry, omawiany typ gry wielochodowej nosi nazwę gry wielochodowej parametrycznej. Gra wielochodowa parametryczna jest więc to taka gra wielochodowa z pełną informacją, w której występują co najmniej dwie sytuacje początkowe. W interpretacji graficznej gra

wielochodowa parametryczna jest reprezentowana dendrytem D, składającym się co najmniej z dwóch wierzchołków początkowych, na których zbudowane są oddzielne dendryty d_i. Dendryt gry wielochodowej



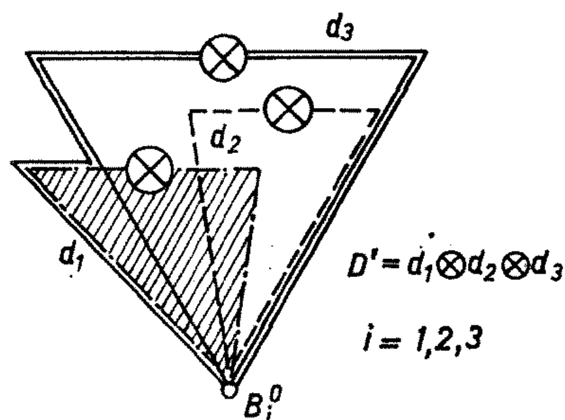
Ryc. 15

parametrycznej przedstawiony został w sposób symboliczny na ryc. 15. Dendryty d_i, składowe dendrytu D, przyjęto nazywać dendrytami podstawowymi. Każdy dendryt podstawowy $d_i \subset D$ ma przyporządkowany sobie parametr p_1, który wyróżnia go w strukturze dendrytu D.

W celu określenia optymalnego postępowania gracza A w grze wielochodowej parametrycznej należy przeprowadzić jednostronną optymalizację dendrytu D. Optymalizację tę realizuje się oddzielnie dla każdego dendrytu podstawowego $d_i \subset D$. Należy jednak zauważyć, że gra wielochodowa parametryczna opisuje najczęściej bardzo złożony proces. Zapamiętanie przez gracza A jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu D lub też posługiwanie się tym dendrytem w trakcie przebiegu gry jest na ogół niemożliwe. Stąd też w tego typu grach gracza A z reguły będzie reprezentował automat rozgrywający lub też odpowiednio zaprogramowany komputer.

W związku z tym — z przyczyn uzasadnionych już w poprzednim punkcie — zachodzi konieczność minimalizacji jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu D. Sposób przeprowadzenia tej minimalizacji zależy od struktury dendrytu. Otóż jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry parametrycznej składa

się z zoptymalizowanych dendrytów podstawowych d_i mających różne rozmiary i różną strukturę. Wśród tych dendrytów można znaleźć co najmniej jeden taki dendryt d_i, który w porównaniu do pozostałych charakteryzuje się największymi rozmiarami. Względem dendrytu d_i o największych rozmiarach, noszącego nazwę dendrytu odniesienia, przeprowadza się proces minimalizacji.



Ryc. 16

Polega ona na tym, że wszystkie jednostronnie zoptymalizowane dendryty podstawowe $d_i \subset D$ nakłada się na dendryt odniesienia, zważając nie na ich opis, a tylko na strukturę. Wynikiem takiego nałożenia będzie pewien dendryt zastępczy D', zawierający jeden wierzchołek początkowy reprezentujący wszystkie wierzchołki początkowe dendrytu D. W dendrycie zastępczym D' można wyróżnić strukturę każdego zoptymalizowanego dendrytu $d_i \subset D$. Dla ilustracji na ryc. 16 przedstawiono symbolicznie dendryt zastępczy D' zawierający w sobie struktury trzech dendrytów: d_1, d_2, d_3.

Strukturę dendrytu zastępczego D', a ściślej mówiąc krawędzie tego dendrytu, opisuje się symbolami s_j i w_i. Dla dendrytu podstawowego d_i(max), będącego dendrytem odniesienia, między elementami z i y opisującymi jego krawędzie a elementami s i w opisującymi krawędzie dendrytu zastępczego D' istnieje następująca zależność

$$y_i = w_i \quad \text{i} \quad z_j = s_j$$

Dla pozostałych dendrytów podstawowych zależność ta musi być całkiem inna, np.

$$z_j = s_k \quad \text{i} \quad y_i = w_r$$

Jak już wiadomo, symbole w i s opisujące krawędzie dendrytu zastępczego D' noszą nazwę fikcyjnych strategii chodowych graczy. Dla gracza A zbiór jego fikcyjnych strategii chodowych przedstawia się następująco

$$W = \{w_1, w_2, ..., w_i, ..., w_l\} \tag{3.11}$$

Analogicznie zbiór fikcyjnych strategii chodowych gracza B zadany jest postacią

$$S = \{s_1, s_2, ..., s_j, ..., s_n\} \tag{3.12}$$

Przejście z rzeczywistych strategii chodowych na fikcyjne strategie chodowe opisujące dendryt zastępczy D', przy ustalonej wartości parametru p_t, w większości przypadków jest określone następującą parą funkcji

$$s = \Psi_i(z, n)|_{p_t = \text{const}} \tag{3.13}$$

$$w = \Phi_i(y, n)|_{p_t = \text{const}} \tag{3.14}$$

Z przedstawionych zależności wynika, że przy ustalonej wartości parametru p_t wartość fikcyjnej strategii chodowej gracza zależy od aktualnej rzeczywistej strategii chodowej danego gracza i numeru kolejnego posunięcia w grze.

Stąd też, aby móc określić aktualną fikcyjną strategię chodową gracza w procesie prowadzenia gry o parametrze p_t, należy znać rzeczywistą strategię chodową wykonaną przez gracza oraz numer kolejnego posunięcia w grze. W niektórych grach wielo-

chodowych parametrycznych wymienione funkcje mogą mieć prostszą postać, a mianowicie

$$s = \Psi_i(z)\big|_{p_i=\mathrm{const}} \qquad (3.15)$$

$$w = \Phi_i(y)\big|_{p_i=\mathrm{const}} \qquad (3.16)$$

Jednakże bardzo często może zdarzyć się przypadek, że w celu zapewnienia jednoznacznego odwzorowania zbioru Z w zbiór S oraz zbioru Y w zbiór W należy posługiwać się parą funkcji

$$s = \Psi_i(z, \gamma)\big|_{p_i=\mathrm{const}} \qquad (3.17)$$

$$w = \Phi_i(y, \gamma)\big|_{p_i=\mathrm{const}} \qquad (3.18)$$

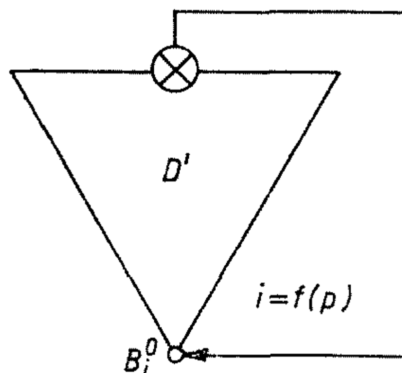
W wyrażeniach tych symbol γ oznacza numer porządkowy aktualnego wierzchołka dendrytu.

Znajomość dendrytu zastępczego D' oraz przedstawionych wyżej funkcji umożliwia określenie struktury automatu rozgrywającego, przeznaczonego do realizacji gry wielochodowej parametrycznej w interesie gracza A.

Bardzo często gra wielochodowa parametryczna składa się z kilku cykli, tzn. jest powtarzana kilkakrotnie aż do uzyskania określonego końcowego wyniku gry. W każdym cyklu jest rozgrywana jedna partia gry, reprezentowana odpowiednim jednostronnie zoptymalizowanym dendrytem d_i wchodzącym w skład struktury dendrytu zastępczego D'.

Każdorazowo po zakończeniu danej partii gry następuje przejście od aktualnego wierzchołka końcowego dendrytu zastępczego D' do wierzchołka początkowego tego dendrytu — przejście to połączone jest ze zmianą parametru p_i lub bez jego zmiany. Dendryt zastępczy gry parametrycznej z cyklem został przedstawiony symbolicznie na ryc. 17. Pojęcie gry wielochodowej parametrycznej ułatwia

kompozycję odpowiedniego modelu matematycznego, przydatnego do opisu wielu procesów sterowania. Stąd też prace związane z formalnym opisem



Ryc. 17

tych gier mają duże znaczenie w cybernetyce technicznej i rzutują na rozwój odpowiedniej klasy automatów skończonych, zapewniając realną możliwość wykorzystania tych automatów w procesach optymalnego sterowania.

4

Rola teorii gier w cybernetyce

Wstępne pojęcie o cybernetyce

Cybernetyka jest niewątpliwie jedną z najbardziej współczesnych nauk. Sam termin „cybernetyka" pochodzi od starogreckiego słowa *kybērnḗtēs*, co znaczy „sternik", ewentualnie „kierujący". W dziełach pisarzy starożytnych, np. Platona, „cybernetyka" jest wymieniona jako nauka o zarządzaniu prowincją. W 1834 r. Amper, klasyfikując nauki, wprowadził cybernetykę do spisu nauk społecznych. Obecnie cybernetykę rozumie się jako naukę o sterowaniu w sensie ogólnym i związanym z nim przetwarzaniu informacji, występującej w procesie sterowania, oraz zalicza się ją do nauk ścisłych.

Idea stworzenia cybernetyki jako uogólnionej nauki o sterowaniu zrodziła się tuż przed wybuchem II wojny światowej w wyniku dyskusji z zakresu metodyki badań naukowych, prowadzonych przez grupę amerykańskich naukowców z ośrodka Harvard Medical School. W tej grupie czołową pozycję zajmował amerykański matematyk Norbert Wiener i zaprzyjaźniony z nim Meksykanin Arturo Rosenblueth. Celem prowadzonych przez nich dociekań naukowych było przezwyciężenie niebezpieczeństw nadmiernej specjalizacji w nauce, której konsekwencją było oddzielenie od siebie poszczególnych

nauk. Uczeni ci doszli do wniosku, że powinna istnieć pewna nauka uogólniająca tematy leżące dotychczas odłogiem na pograniczu różnych dyscyplin, jednakże nie potrafili jeszcze dokładnie sprecyzować zakresu tej nauki. Wybuch II wojny światowej i spowodowane nim ukierunkowanie prac naukowych dla potrzeb wojska narzuciły wyjściową tematykę dla rodzącej się nauki. Otóż nie zweryfikowane dotąd wnioski, wynikające wyłącznie z rozważań naukowych, zostały znacznie rozwinięte w trakcie opracowywania urządzenia sterującego ogniem artylerii przeciwlotniczej. Uczestnicząc w pracach badawczych nad tego typu urządzeniem Wiener i współpracujący z nim matematyk J. Bigelow stwierdzili, że istnieje daleko idąca zbieżność między procesami sterowania i przekazywania sygnałów w urządzeniach technicznych i w organizmach żywych. Zarówno wtedy, kiedy obiektem steruje człowiek, jak i wtedy, kiedy sterowanie odbywa się automatycznie, na proces sterowania wpływa informacja o rezultatach tego sterowania, otrzymywana od sterowanego obiektu drogą sprzężenia zwrotnego. Spostrzeżenia Wienera i Bigelowa, przekonsultowane z fizjologiem Rosenbluethem, zostały wykorzystane przy badaniu przebiegu samosterowalności w organizmach żywych. W wyniku przeprowadzonych tego typu badań Wiener oraz współpracujący z nim naukowcy uświadomili sobie, że problemy komunikacji, sterowania i mechaniki statycznej stanowią zasadniczo jedną całość, niezależnie od tego czy dotyczą maszyny, czy istoty żywej.

Jednakże brak było takiej jednej wspólnej dziedziny nauki, która by obejmowała te wszystkie problemy, a tym samym brak było odpowiedniej nazwy dla tej dziedziny. W rezultacie poszukiwań odpowiedniej nazwy wybór padł na słowo *kybēr-*

nētēs, którego sens odpowiadał całkowicie całokształtowi rozpatrywanych problemów. W ten sposób we współczesnym spisie nauk pod terminem „cybernetyka" pojawiła się nowa gałąź wiedzy. Podstawowe pojęcia cybernetyki, jej cele i zakres zostały sprecyzowane we wspomnianej, napisanej przez Norberta Wienera i wydanej w 1948 r. książce *Cybernetyka czyli sterowanie i komunikacja w zwierzęciu i maszynie*.

Cybernetyka jako synteza wielu nauk i to częstokroć całkowicie różniących się między sobą jest specyficzną nauką. Obejmuje bardzo szeroki zakres tematów, wśród których, oczywiście między innymi, można wyróżnić takie działy, jak teoria automatów, teoria systemów, teoria informacji, teoria sterowania oraz szereg innych działów przynależnych również do innych nauk, takich jak biologia, psychologia, medycyna, ekonomia, lingwistyka itd.

Przedmiotem cybernetyki są prawa sterowania, odnoszące się zarówno do urządzeń technicznych, jak i organizmów żywych. Sterowanie jest celowym oddziaływaniem na określone zjawiska lub obiekty fizyczne. Sterowanie może pochodzić z zewnątrz lub może być właściwością samego obiektu i wówczas mówimy o samosterowaniu lub automatyzmie. Obiekt, który charakteryzuje się samosterowalnością, nazywamy automatem. Obiektem takim może być urządzenie techniczne lub organizm żywy. Z tego punktu widzenia mózg ludzki i elektroniczna maszyna cyfrowa, służące do możliwie najszerszej realizacji tej samej w obu przypadkach funkcji samosterowania, są w jednakowym stopniu organizmami automatycznymi, a więc są automatami. Cybernetyka narusza więc utarte poglądy na temat roli człowieka, traktując go na równi z innymi organizmami, a nawet maszynami. Na pierwszy rzut oka

takie podejście wydaje się nie do przyjęcia. Zwykle uważa się, że automat jest czymś bezwładnym, bezdusznym, niezdolnym do różnorodnych działań. Jednakże w samym słowie „automat" nie ma nic oprócz wskazówki, że dany układ działa sam, bez ingerencji z zewnątrz. W takim ujęciu działanie maszyny jako automatu czy też działanie prostego organizmu żywego lub człowieka są jednakowo definiowane, pomimo że zakres i charakter działania maszyny mogą się znacznie różnić od charakteru i zakresu działania organizmu żywego. Inaczej mówiąc cybernetyka nie stawia pytania „co to jest za przedmiot", lecz klasyfikuje dany przedmiot według tego, jak się on zachowuje, tzn. na podstawie tego czy przedmiot jest sterowany z zewnątrz, czy też wykazuje cechę samosterowalności. Ponieważ sterowanie w sensie ogólnym jest procesem celowym, cybernetykę można zdefiniować jako naukę o celowości lub o układach o działaniu celowym. Uwzględniając natomiast stosowane w cybernetyce metody badawcze można sformułować twierdzenie, że cybernetyka jest nauką, która z pomocą doświadczenia i aparatu matematycznego bada celowość i samosterowanie w przyrodzie i technice. Ponieważ przyroda i technika są domeną zainteresowań specjalistów z różniących się między sobą dziedzin nauki, w celu ujednolicenia terminologii zostało wprowadzone do cybernetyki pojęcie s y s t e m u. Przez system rozumie się zespół dowolnych elementów, traktowanych jako pewna całość i pozostających w ściśle określonym wzajemnym związku. Systemem może być organizm żywy, urządzenie techniczne, przedsiębiorstwo przemysłowe, rakieta kosmiczna itp. Każdy system działa w pewnym otoczeniu. Otoczeniem danego systemu nazywamy zbiór wszystkich nie należących do systemu obiektów, których włas-

ciwości oddziałują na system i zarazem ulegają zmianie pod wpływem działania tego systemu. Ze względu na reakcję systemu z otoczeniem, systemy możemy podzielić na układy (systemy) bezwzględnie odosobnione i układy względnie odosobnione.

System będący układem bezwzględnie odosobnionym nie ma ani jednego wejścia i ani jednego wyjścia prowadzącego poza system do otoczenia, tzn. nie występuje wymiana energii czy też informacji między systemem a otoczeniem. Natomiast system będący układem względnie odosobnionym nie jest zupełnie izolowany od swego otoczenia i ma co najmniej jedno wyjście do otoczenia. W praktyce spotykamy się najczęściej z systemami będącymi układami względnie odosobnionymi.

Cybernetyka zajmuje się badaniem tylko takich systemów, które zorganizowane są w sposób celowy i są systemami z zachowaniem celowym. Systemem z zachowaniem celowym nazywamy taki system, który działa na otoczenie i reaguje na jego wpływy w taki sposób, aby został osiągnięty określony cel. Jeżeli w dążeniu do osiągnięcia określonego celu system steruje sam sobą, wówczas mówimy, że system taki charakteryzuje się zdolnością do samoregulacji lub samosterowaniem. W systemie mającym właściwość samosterowania wyróżnia się część sterującą i część sterowaną. System złożony z części sterującej i części sterowanej, a więc system, w którym występuje proces sterowania, nazywamy systemem sterowania. W żywym organizmie, potraktowanym jako system, częścią sterującą jest centralny układ nerwowy, a częścią sterowaną są organy ruchu lub też inne narządy. W dowolnym systemie sterowania proces sterowania może być realizowany tylko wówczas, gdy część sterująca systemu będzie otrzymywała informację o wynikach sterowania, a więc

musi istnieć pewne sprzężenie między częścią sterującą systemu a częścią sterowaną.

W ogólnym przypadku sprzężeniem między dowolnymi obiektami nazywamy związek polegający na odpowiednim oddziaływaniu obiektów na siebie. Sprzężenie, w którym jeden z obiektów oddziałuje na drugi tak, jak to przedstawiono na ryc. 18 *a*



Ryc. 18

dla obiektów *A* i *B*, nazywamy s p r z ę ż e n i e m p r o s t y m. Sprzężenie, w którym dwa obiekty *A* i *B* oddziałują nawzajem na siebie nazywamy s p r z ę ż e n i e m z w r o t n y m, co przedstawiono na ryc. 18 *b*. Na sprzężenie zwrotne składają się wobec tego dwa sprzężenia proste przeciwnie skierowane, sprzężenie zwrotne tworzy więc zamknięty obieg oddziaływań.

Sprzężenie zwrotne jest najbardziej podstawowym i eksponowanym pojęciem w cybernetyce, co uzasadnione jest tym, że w procesach sterowania zawsze istnieje sprzężenie zwrotne. Występuje ono w przyrodzie tak powszechnie, że jest po prostu wszechobecne. Wielką rolę sprzężenia zwrotnego w procesach sterowania uwypuklił Norbert Wiener porównując proces sterowania w opracowywanym przez siebie sytemie kierowania ogniem artylerii przeciwlotniczej z procesem sterowania występującym w organizmie żywym. Na wielu przykładach łatwo można stwierdzić, że zarówno w maszynie będącej automatem, jak i w organizmie człowieka proces

sterowania polega na porównaniu aktualnego działania z odpowiednim działaniem zadanym, a więc w obu przypadkach występuje sprzężenie zwrotne. Wyjaśnimy to na następujących dwóch przykładach.

Przypuśćmy, że człowiek chce podnieść leżący przed nim ołówek. Żeby to uczynić, musi wprawić w ruch pewne mięśnie, a więc wykonać ruch ręką w kierunku ołówka. Ruch ręki odbywa się tak, by w miarę upływu czasu odległość ręki od ołówka ulegała zmniejszeniu. Czynność ta przebiega automatycznie i najczęściej nie jest w pełni uświadomiona przez człowieka. Odbywa się to w ten sposób, że mózg człowieka otrzymuje od oczu bezustannie informacje, mówiące o pozycji ręki. Dzięki tym informacjom mózg wykonuje jak gdyby obliczenia, których wynikiem są odpowiednie instrukcje nakazujące mięśniom ręki poruszanie nią w taki sposób, aby różnica między aktualnym a pożądanym położeniem ręki została usunięta.

Rozpatrzmy teraz inny prosty przykład sprzężenia zwrotnego, dotyczący tym razem urządzenia technicznego. Mianowicie w pewnym pomieszczeniu, w celu utrzymania stałej temperatury, zainstalowano piec ogrzewniczy z regulatorem temperatury połączonym z odpowiednim czujnikiem temperatury. Elementy te tworzą razem bardzo prosty system sterowania, w którym wyróżnić można część sterującą, złożoną z czujnika temperatury i regulatora temperatury, oraz część sterowaną, którą jest piec ogrzewniczy. Pod wpływem działania czujnika regulator tak steruje mocą ogrzewczą pieca, aby usunąć różnicę między aktualną temperaturą w pomieszczeniu a temperaturą zadaną, tj. ustaloną dla pomieszczenia. A więc i w tym przypadku istnieje sprzężenie zwrotne, gdyż informację o wynikach sterowania odbiera czujnik, przekazuje ją do regu-

latora, który z kolei na podstawie tej informacji steruje mocą ogrzewczą pieca.

W układach sprzężenia zwrotnego mamy więc zamknięty obieg informacji. Z przedstawionych przykładów wynika, że sprzężenie zwrotne występujące w procesie sterowania determinuje jednoznaczne działanie systemów sterowania.

Omówione w niniejszym punkcie podstawowe pojęcia cybernetyki, takie jak sterowanie, system i sprzężenie zwrotne, zajmują czołową pozycję w zbiorze wszystkich innych możliwych pojęć związanych z cybernetyką. Pomimo że problematyka objęta cybernetyką jest bardzo rozległa i dotyczy zagadnień z różnych dziedzin życia, nauki i techniki, we wszystkich rozpatrywanych problemach cybernetycznych z pojęciami tymi zawsze się spotykamy. Z tych samych względów przedstawiona wyżej krótka charakterystyka cybernetyki i jej podstawowych pojęć ułatwi Czytelnikowi zrozumienie problemów cybernetycznych, rozpatrywanych w dalszej części niniejszej książki.

System i sterowanie

Jak to stwierdziliśmy w poprzednim punkcie, podstawowym przedmiotem zainteresowań cybernetyki są prawa sterowania odnoszące się zarówno do urządzeń technicznych, jak i organizmów żywych. W cybernetyce przyjęto stosować dla urządzeń technicznych i organizmów żywych ogólną nazwę systemu o zachowaniu celowym. Stąd też bardzo często mówi się, że współczesna cybernetyka jest ogólną teorią sterowania dowolnych systemów o zachowaniu celowym. System może być sterowany z zewnątrz albo też, w dążeniu do uzyskania okreś-

ionego celu, może sam sobą sterować. Przedmiotem dalszych naszych rozważań będą tylko takie systemy, które sterują same sobą, a więc cechują się samosterowalnością. Zachowanie się systemu w czasie jego działania charakteryzują pewne wielkości, które mogą przyjmować różne wartości. Wielkości te są bądź właściwościami systemu, bądź też tymi właściwościami otoczenia, które mają wpływ na zachowanie się systemu. Wielkości charakteryzujące stan systemu bez uwzględnienia wpływu otoczenia noszą nazwę własności systemu. Własność systemu to pewna jego cecha, której wielkość (wartość) w funkcji czasu może się zmieniać.

Na przykład rakietę kosmiczną jako system charakteryzują takie własności, jak masa rakiety, szybkość rakiety, współrzędne rzeczywiste położenia rakiety, itp., a więc wielkości, których wartość w funkcji czasu podlega zmianie. Czasami pojęcie „własność systemu" zastępuje się pojęciem „dziedzina", mając na uwadze dziedziny przedsięwzięć, w których zakresie system funkcjonuje. Na przykład dla zakładu przemysłowego traktowanego jako system dziedziną może być produkcja, transport, zaopatrzenie itp.

Każdy system może mieć kilka własności, ewentualnie dziedzin, które go charakteryzują, np. X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_m. Dowolna własność X_i systemu może przyjmować różne wartości leżące w określonym przedziale, przy czym wśród tych różnych wartości pewne wartości przyjmuje się jako wyróżnione. Aktualną w danej chwili wartość własności nie zawsze można dokładnie określić, stąd też wyraża się ją w sposób przybliżony z pomocą wartości wyróżnionych. Na przykład temperatura ciała człowieka, będąca jedną z jego właściwości, przyjmuje wartości z przedziału 34—42°C. W tym przedziale liczba

możliwych wartości temperatury jest nieskończona. Ponieważ jednak pomiaru temperatury dokonujemy termometrem lekarskim o zdolności rozdzielczej 0,1°C, w praktyce mamy do czynienia ze skończonym zbiorem wartości temperatury ciała człowieka — zbiór ten zawiera tylko 81 elementów.

Posługując się pojęciem wartości wyróżnionej, w dalszych naszych rozważaniach będziemy przyjmować, że własność systemu charakteryzuje się przyporządkowanym sobie skończonym zbiorem wartości. Dla własności X_i zbiór taki będziemy wyrażać następującą postacią

$$X_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_j}, ..., x_{i_w}\} \qquad (4.1)$$

W systemie będącym układem bezwzględnie odosobnionym aktualne w danej chwili wartości wszystkich własności X_1, X_2, X_i, ..., X_m, podane w wartościach wyróżnionych, jednoznacznie określają stan systemu. Stan ten możemy wyrazić symbolicznie następującym wektorem

$$x = [x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m] \qquad (4.2)$$

gdzie x_i — i-ta współrzędna wektora x przyjmująca wartości ze zbioru X_i.

Olbrzymia większość systemów rozpatrywanych w cybernetyce należy do układów względnie odosobnionych. W celu określenia stanu systemu będącego układem względnie odosobnionym należy uwzględnić również aktualne wartości tych własności przynależnych do otoczenia, które oddziałują na system lub ulegają zmianie pod wpływem tego systemu. Na przykład, gdy systemem jest samolot, to otoczeniem tego systemu jest atmosfera, chociaż nie wyłącznie, bo otoczeniem mogą być inne samoloty, ukształtowanie terenu lądowiska itp.

Takie własności atmosfery, jak wilgotność, stan zachmurzenia, ciśnienie itp. rzutują na zachowanie się samolotu w powietrzu. Stan systemu jest więc określony nie tylko przez własności przynależne do systemu, lecz również przez pewne własności otoczenia. Oznaczając te własności otoczenia symbolami $H_1, H_2, ..., H_j, ..., H_r$, stan systemu możemy wyrazić wektorem

$$z = [x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m, h_1, h_2, ..., h_j, ..., h_r] \tag{4.3}$$

którego współrzędne typu x_i i h_j reprezentują odpowiednio aktualne wartości własności typu X_i i H_j. Uwzględniając wszystkie możliwe wartości współrzędnych wektora z, otrzymamy zbiór dopuszczalnych stanów systemu przedstawiony w postaci

$$Z = \{z_1, z_2, ..., z_j, ..., z_s\} \tag{4.4}$$

Elementy zbioru Z reprezentują różniące się między sobą stany systemu, z których każdy wyraża się analitycznie wektorem o postaci wektora z zadanego wyrażeniem (4.3). Zgodnie z przyjętym założeniem, że zbiory wartości poszczególnych własności typu X_i i H_j są zbiorami skończonymi, zbiór Z jest również zbiorem skończonym.

Działanie systemu z zachowaniem celowym charakteryzuje się tym, że system dąży do uzyskania określonego celu zgodnie z zadaną funkcją celu. Zadany cel można uzyskać w różny sposób i z różnym efektem końcowym. Na przykład, samolot — potraktowany przez nas jako system z zachowaniem celowym — może wznieść się na określoną wysokość wykonując lot według różnych trajektorii i przy różnych prędkościach. A więc istnieje pewien zbiór możliwych wariantów działania samolotu, którego

celem jest osiągnięcie określonej wysokości. Na zbiorze możliwych wariantów działania samolotu określona jest funkcja celu, uwarunkowana koniecznością dokonywania wyboru wariantu. Każdemu wariantowi możemy przyporządkować pewną liczbę, która go charakteryzuje i jednocześnie jest wartością funkcji celu. Wartość funkcji celu nosi nazwę zysku. Zysk określa się według odpowiednio dobranego kryterium efektywności. Na przykład dla samolotu kryterium efektywności może być czas, po którym osiągnie on pożądaną wysokość, może być ilość zużytego paliwa lub równie dobrze kryterium efektywności może dotyczyć obydwu tych wielkości. Przy wykonywaniu określonych czynności, leżących w zakresie funkcjonowania systemu, system realizuje pewne decyzje. W systemie, który steruje sam sobą, decyzje te wypracowuje część sterująca.

W każdym systemie charakteryzującym się samosterowalnością można zawsze wyróżnić centralny organ sterujący, będący elementem składowym systemu. Dla człowieka organem takim jest mózg, natomiast dla bezzałogowej rakiety kosmicznej, nie sterowanej z Ziemi, organem sterującym jest specjalny automat będący jedną z części składowych rakiety. Decyzje wypracowane przez organ sterujący nazywamy wielkościami sterującymi systemu. Podstawą do wypracowania decyzji sterującej działaniem systemu jest informacja o aktualnym stanie systemu. Istota samosterowalności systemu polega na tym, że system tak dobiera sobie decyzje, aby w wyniku ich realizacji mógł znaleźć się w możliwie najlepszym stanie. Wiadomo jednak, że w funkcji czasu stany systemu zmieniają się. Przyczynia się do tego zarówno działanie samego systemu, jak i wpływ otoczenia na zachowanie się systemu. W dążeniu do uzyskania zadanego celu zmiany stanu systemu powinny prze-

biegać tak, aby cel ten zrealizowany został z jak najlepszym efektem, którego miarą jest możliwie maksymalna wartość funkcji celu. Stąd też przejście systemu od jednego do drugiego stanu powinno być odpowiednio sterowane. Sterowanie sprowadza się do tego, że na podstawie informacji o aktualnym stanie systemu jest wypracowywana odpowiednia decyzja, która określa czy system powinien pozostać w danym stanie, czy też powinien zmienić swój stan. Funkcjonowanie systemu jest więc związane z pewnym procesem decyzyjnym. Proces ten jest najczęściej wieloetapowy, gdyż funkcjonowanie systemu przebiega w czasie, z kolei czas ten można rozbić na poszczególne etapy, różniące się między sobą pewną specyfiką działania systemu.

W ogólnym przypadku wieloetapowy proces decyzyjny ma charakter dyskretny, tj. decyzje do sterowania systemem są wypracowywane tylko w ściśle określonych momentach czasu. Wypracowana na danym etapie — w dyskretnym momencie czasu — decyzja nosi nazwę decyzji etapowej. Decyzja etapowa jest wielkością sterującą działaniem systemu na danym etapie jego funkcjonowania. W urządzeniach technicznych i w organizmach żywych wielkość sterująca ma postać odpowiedniego sygnału sterującego. Sygnał sterujący, wypracowany przez organ sterujący systemu, sterując działaniem poszczególnych elementów systemu oddziałuje na własności systemu. W wyniku tego oddziaływania wartości poszczególnych własności charakteryzujących działanie systemu ulegają zmianie. Własności systemu, na które oddziałuje sygnał sterujący, noszą nazwę wielkości sterowanych, a elementy systemu sterowane sygnałem sterującym nazywają się elementami sterowanymi. Na przykład dla rakiety wielkością sterowaną jest kierunek lotu, prędkość,

ciąg silników itp.; często też mówimy, że sterujemy prędkością rakiety, kierunkiem lotu, ciągiem silników.

Aktualne wartości wielkości sterowanych wpływają na stan systemu. Jednak stan systemu jest określany nie tylko przez wielkości sterowane, lecz również przez wielkości nie sterowane. Wielkościami nie sterowanymi są te własności otoczenia, które oddziałują na system. Wielkości nie sterowane, zmieniające się w czasie w sposób losowy i mające wpływ na stan systemu, noszą nazwę wielkości zakłócających. Sygnał sterujący wypracowany na podstawie informacji o aktualnym stanie systemu jest decyzją dotyczącą tylko zmiany wartości wielkości sterowanych. Ponieważ w systemie najczęściej wyróżnia się kilka wielkości sterowanych, sygnał sterujący reprezentuje decyzję złożoną z decyzji, dotyczących poszczególnych wielkości sterowanych.

W ogólnym przypadku decyzja do sterowania systemu, podobnie jak i stan systemu, wyraża się analitycznie w postaci następującego wektora

$$y = [y_{x_1}, y_{x_2}, ..., y_{x_i}, ..., y_{x_m}] \qquad (4.5)$$

gdzie współrzędna y_{x_i} jest decyzją dotyczącą sterowania własnością X_i (wielkością sterowaną) systemu. Zbiór możliwych wartości dowolnej współrzędnej y_{x_i} wektora y jest skończony, co jest zgodne z przyjętym przez nas założeniem, że zbiór wartości własności X_i jest skończony. Uwzględniając wszystkie możliwe wartości współrzędnych wektora y, zbiór możliwych decyzji do sterowania systemem wyrazi się zbiorem

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_w\} \qquad (4.6)$$

Każdy element y_i zbioru Y jest decyzją etapową, która może być podjęta przez system w trakcie jego funkcjonowania. Natomiast ściśle określony ciąg

decyzji etapowych, w których wyniku system uzyskuje cel swego działania, nosi nazwę decyzji pełnej.

Zbiory Z i Y oraz istniejące między elementami tych zbiorów relacje są podstawowymi składowymi modelu matematycznego opisującego proces sterowania systemem. Model ten, ze względu na wieloetapowość procesu decyzyjnego zachodzącego w systemie, najwygodniej jest przedstawić w postaci dwuosobowej gry wielochodowej.

Gra jako model abstrakcyjny procesu sterowania

Działanie systemu z zachowaniem celowym w funkcji czasu jest pewnym procesem, realizowanym przez system w dążeniu do uzyskania określonego celu końcowego. Na przykład, gdy systemem jest zakład przemysłowy, to procesem takim jest proces produkcji. Dla rakiety kosmicznej procesem takim może być proces zbliżania się do innego obiektu kosmicznego. Obiekt sterujący systemu, wypracowując odpowiednie sygnały sterujące, a więc sterując systemem, wpływa na proces funkcjonowania systemu w ściśle określony sposób tak, aby działanie systemu przebiegało w pożądanym kierunku. Stąd też proces funkcjonowania systemu jest procesem sterowanym, natomiast wszystkie czynności związane ze sterowaniem nazywane są procesem sterowania.

W ogólnym przypadku proces sterowania rozumie się jako całokształt przedsięwzięć związanych z wywieraniem pożądanego wpływu na określone zjawiska i procesy. Bardzo często proces sterowania możemy opisać modelem matematycznym dwuosobowej gry wielochodowej. Posługując się takim

modelem, proces sterowania traktujemy umownie jako proces prowadzenia pewnej gry wielochodowej. W takiej interpretacji procesu sterowania bardzo istotną rolę odgrywa odpowiedni dobór i określenie przeciwstawnych sobie stron gry. Możliwym do przyjęcia podejściem do tego zagadnienia jest potraktowanie organu sterującego systemem jako jednej strony gry, natomiast części sterowanej systemu, wraz z pewnymi własnościami otoczenia jako drugiej strony gry. Pewnymi własnościami otoczenia, które należy uwzględnić w zdefiniowaniu części sterowanej systemu jako strony gry, są te własności otoczenia, które wpływają na działanie systemu. Po zdefiniowaniu stron gry możemy je oznaczyć symbolami A i B. Pod symbolem A będziemy rozumieć organ sterujący systemu, a pod symbolem B część sterowaną systemu wraz z wymienionymi wyżej własnościami otoczenia. Zbiorem strategii chodowych strony B gry jest zbiór możliwych stanów systemu. Zbiór ten ma postać (p. wzór 4.4)

$$Z = \{z_1, z_2, ..., z_j, ..., z_s\}$$

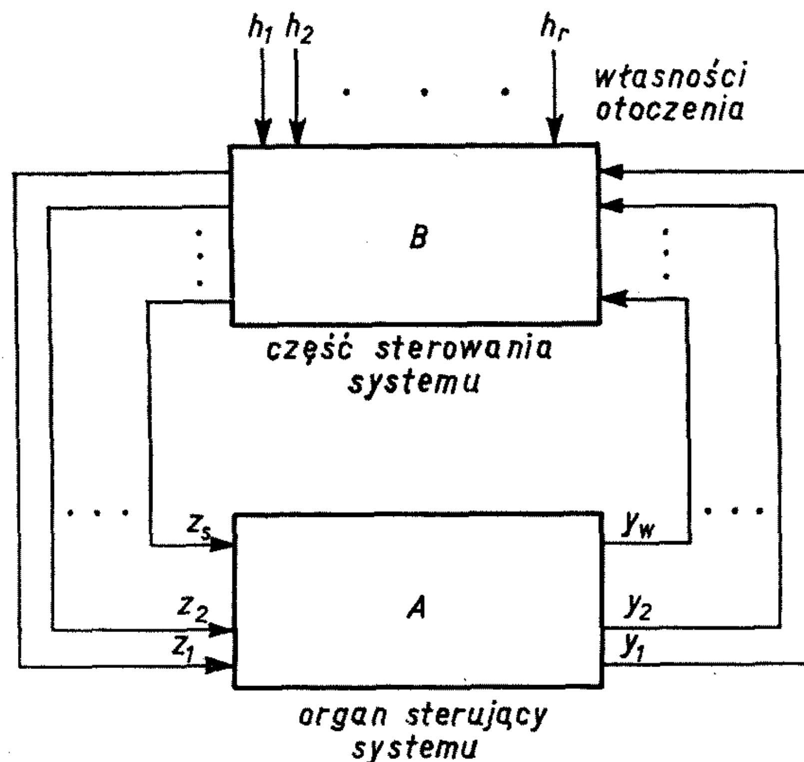
Zbiorem strategii chodowych strony A gry jest zbiór możliwych decyzji etapowych do sterowania systemem. Zbiór ten ma postać (p. wzór 4.6)

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_w\}$$

Reguły gry opisującej dany proces sterowania wynikają z charakteru działania systemu oraz z zadanej funkcji celu. Grę taką umownie można potraktować jako grę antagonistyczną. Mianowicie można założyć, że strona A gry będzie dążyła do maksymalizowania wartości funkcji celu, natomiast strona B gry będzie dążyła do minimalizacji tej funkcji.

Ponadto można przyjąć, że strona *B* gry zachowuje się jak natura, gdyż na działanie systemu wpływa wiele czynników losowych, uwarunkowanych wpływem otoczenia i wynikających z charakteru funkcjonowania systemu. Przy takim założeniu stronę *A* gry należy potraktować jako rozumnego gracza, który wykorzystując błędy popełniane przez gracza *B* (naturę) będzie maksymalizował swoją wygraną.

Przyjęty model sterowania, dający się opisać postacią dwuosobowej gry wielochodowej, został poglądowo przedstawiony na ryc. 19. Jak to już było



Ryc. 19

podane w poprzednim punkcie, działanie systemu w czasie można podzielić umownie na etapy. Z tych też względów proces sterowania jest procesem wieloetapowym. Na początku każdego etapu organ sterujący systemu, będący stroną *A* gry, na podstawie informacji o aktualnym stanie systemu wybiera odpowiednią strategię chodową, będącą decyzją

do sterowania systemem. Ponieważ funkcja celu w wieloetapowym procesie decyzyjnym ma charakter addytywny (osiągnięcia systemu na poszczególnych etapach sumują się), każdej strategii chodowej $y_i \in Y$ gracza A można przyporządkować pewien zysk etapowy. Gracz A powinien tak prowadzić grę z graczem B, aby na ostatnim etapie sumaryczny zysk ze wszystkich etapów był możliwie największy. Znaczy to, że na dowolnym etapie organ sterujący systemem na podstawie informacji o stanie systemu, tj. o strategii chodowej gracza B, powinien zastosować taką strategię chodową $y_i \in Y$, która w konsekwencji możliwych stanów systemu w następnych etapach i zastosowanych na tych etapach strategii chodowych $y_i \in Y$ zapewnia otrzymanie największego zysku sumarycznego.

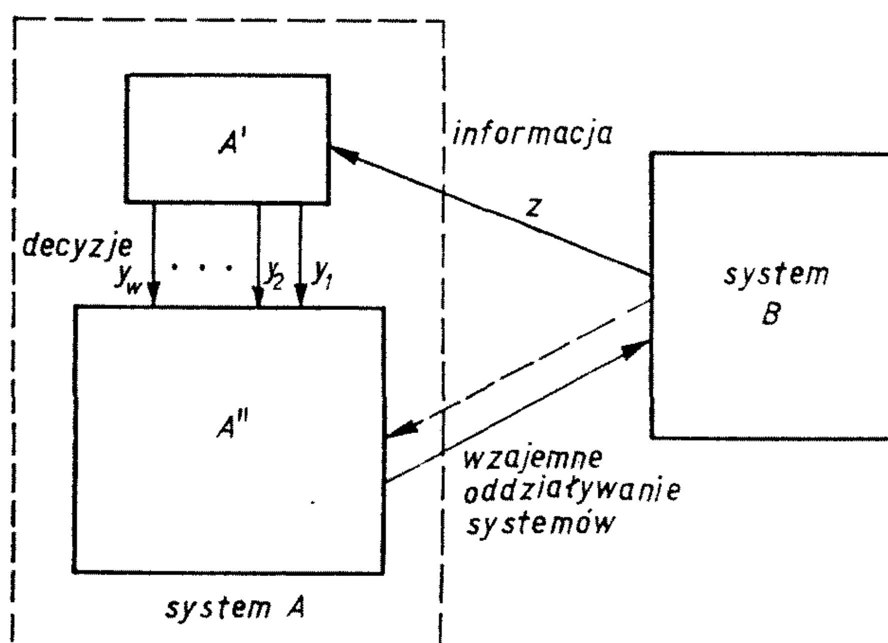
Jak wiadomo, zasada prowadzenia dwuosobowej gry wielochodowej polega na tym, że obaj gracze wykonują ruchy na przemian, aż do osiągnięcia końcowego celu gry. Ruch gracza B i odpowiedź na ten ruch gracza A tworzą sekwencję ruchów z_j, y_i. Tak uporządkowana para z_j, y_i nosi nazwę posunięcia w grze i warunkuje sobą proces sterowania systemem na danym etapie jego funkcjonowania, gdyż z_j jest stanem systemu, a y_i — decyzją podjętą przez organ sterujący A ze względu właśnie na aktualny stan z_j. Postacią graficzną gry wielochodowej opisującej proces sterowania jest dendryt gry. Ponieważ organ sterujący systemem jest stroną gry zainteresowaną w optymalnym działaniu systemu, nie może on dopuścić do tego, aby gra potoczyła się po niekorzystnej ścieżce dendrytu. Stąd też w dowolnej sytuacji organ sterujący, jako gracz A, zmuszony jest dokonywać wyboru odpowiedniej strategii chodowej. Wybór ten łączy się z analizą dendrytu gry. Czas przeznaczony na podjęcie decyzji bardzo często jest tak

krótki, że uniemożliwia dokonywanie analizy dendrytu gry w celu wyboru odpowiedniej strategii chodowej. Stąd też z konieczności strategia chodowa gracza *A* nie będzie w pełni optymalna. Kłopotów tych można uniknąć przeprowadzając wcześniej, tj. przed rozpoczęciem procesu sterowania, jednostronną optymalizację dendrytu gry. Jednostronna optymalizacja dendrytu gry polega na wyeliminowaniu z niego niekorzystnych dla gracza *A* jego strategii chodowych. Optymalizację tę z zasady przeprowadza się przy zastosowaniu maszyny cyfrowej. Jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry jest algorytmem optymalnego działania dla organu sterującego systemem. Znając ten algorytm, organ sterujący systemem *A* można zastąpić maszyną cyfrową lub specjalnie zbudowanym do tego celu automatem rozgrywającym, którego strukturę można określić na podstawie struktury jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Podział stron gry opisującej proces sterowania zależy w dużym stopniu od charakteru funkcjonowania systemu. Jeżeli systemem jest zautomatyzowany zakład przemysłowy, to wówczas stroną *A* gry opisującej proces sterowania może być system cyfrowy (komputer), a drugą stroną gry, tj. stroną *B*, będą wszystkie jednostki organizacyjne tego zakładu. Oczywiste jest, że przy określaniu stanów systemu będących strategiami chodowymi strony *B* należy uwzględnić aktualne wartości pewnych własności tych obiektów otoczenia, które mają wpływ na działanie systemu. Na przykład taką właściwością otoczenia dla danego zakładu przemysłowego jest produkcja innego zakładu, który jest zakładem kooperującym.

Taki podział stron gry nie zawsze jest możliwy. Bardzo często zachodzi konieczność potraktowania systemu jako jednej strony gry, a pewnych obiektów

otoczenia lub pewnych procesów zachodzących w otoczeniu — jako drugiej strony gry.

Innym możliwym podejściem jest rozpatrywanie procesu sterowania w ujęciu gry wielochodowej prowadzonej między dwoma systemami, których działania są mniej lub bardziej przeciwstawne sobie. Przeciwstawne sobie działania systemów wynikają z pewnej sytuacji konfliktowej, w której znajdują się oba systemy. Z drugiej strony wiadomo, że modelem matematycznym sytuacji konfliktowej jest gra. W tym przypadku grę rozpatrujemy z punktu widzenia tego systemu, dla którego działania jest opracowywany algorytm optymalnego sterowania. Algorytm ten determinuje proces sterowania systemem jako proces prowadzenia przez system pewnej gry. Pozostały system, będący stroną *B* gry, może być



Ryc. 20

potraktowany jako natura lub jako rozumny przeciwnik. Ilustracją podejścia do procesu sterowania jako do procesu prowadzenia gry jest ryc. 20. Zgodnie z tym rysunkiem, organ sterujący systemu *A*,

oznaczony symbolem A', opracowuje optymalne decyzje do sterowania systemem na podstawie informacji $z \in Z$ charakteryzującej działanie systemu B. Decyzje te, będace wielkościami sterującymi dla części A'' systemu A, mogą być potraktowane jako strategie chodowe gracza A. Podobnie informacja z o obiekcie B potraktowana może być jako informacja o stosowanych przez gracza B strategiach chodowych.

Proces sterowania systemem A powinien przebiegać tak, aby system osiągnął końcowy cel swego działania z maksymalnym efektem. System B może nie dopuścić do uzyskania przez system A pozytywnego efektu końcowego, jeżeli działanie systemu A nie będzie z góry określone, i to tak, aby dla każdej powstałej sytuacji istniała tylko jedna ściśle określona strategia chodowa postępowania systemu. A więc i w tym przypadku, podobnie jak w poprzednim, trzeba dokonać wcześniejszej analizy dendrytu gry, połączonej z jego jednostronną optymalizacją na korzyść systemu A. Jak wiadomo, charakterystyczną cechą jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry jest to, że przedstawia on taki rodzaj gry, w której jeden z graczy ma z góry narzucone sobie optymalne strategie swego postępowania. Dlatego też przy realizacji gry według jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry system A nie będzie dokonywał w dowolnej sytuacji wyboru strategii chodowej w zbiorze możliwych strategii chodowych przyporządkowanych tej sytuacji, gdyż dysponuje już tylko jedną, optymalną dla tej sytuacji strategią chodową. Omówiony przypadek procesu sterowania — rozumianego jako proces prowadzenia gry — przeciwną stroną, którą jest inny system, rozpatrzony zostanie na przykładzie procesu pościgu w rozdziale 7.

Przedstawiona tutaj krótka charakterystyka nie obejmuje wszystkich możliwych sposobów podejścia do procesu sterowania jako do procesu prowadzenia pewnej gry wielochodowej.

Jednakże na podstawie narzucających się wniosków należy podkreślić, że abstrakcyjne modele procesów sterowania, oparte na wykorzystaniu aparatu formalnego gier wielochodowych, uwypuklają ogromną rolę i przydatność teorii gier w cybernetyce. Interpretacja niektórych problemów cybernetyki oparta na pojęciu gry wielochodowej umożliwia ich optymalne rozwiązanie. To z kolei pozwala na budowę samodzielnych systemów cybernetycznych, których zasada działania opiera się na procesie prowadzenia gry wielochodowej. Głównym organem sterującym tego typu systemu jest automat skończony, który ze względu na zasadę działania nosi nazwę automatu rozgrywającego. Automat ten może być automatem abstrakcyjnym, wyrażonym w postaci programu dla maszyny cyfrowej sterującej danym systemem, lub też może być automatem rzeczywistym, mającym postać odpowiedniego urządzenia technicznego o działaniu dyskretnym. Ze względu na to, że zasady funkcjonowania automatu rozgrywającego ściśle wiążą się z problematyką niniejszej książki, niezbędna jest krótka charakterystyka tego automatu, która zostanie przedstawiona w następnym rozdziale.

5

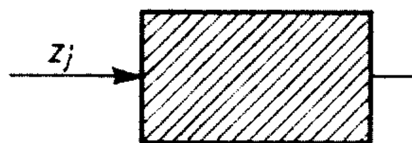
Automaty skończone — rozgrywaj

Pojęcie automatu skończonego

W poprzednich dwóch rozdziałach ki krotnie spotkaliśmy się z automatem rozgrywają jako urządzeniem wypracowującym optymalne cyzje w procesie sterowania systemem z zachc niem celowym. Struktura tego automatu i za: jego działania są ściśle związane z modelem n matycznym gry wielochodowej opisującej pr sterowania danym systemem. Przydatność auton rozgrywającego w sterowaniu działaniem konl nych sytemów podkreśla chyba najbardziej teorii gier w cybernetyce, jako bardzo wygodı aparatu formalnego przydatnego do opisu mc cybernetycznych, a jednocześnie wskazuje na c wość budowy tego typu automatu. Z tych też wz dów uzasadnione będzie przedstawienie kró charakterystyki automatu rozgrywającego. Ponie jednak automat rozgrywający jest automatem sl czonym, charakterystykę naszą poprzedzimy daniem podstawowych pojęć definiujących autc skończony oraz rozpatrzymy jego działanie i st turę.

Automat skończony można sobie wyobrazić „czarną skrzynkę”, do której wejścia jest podaw informacja w postaci sygnału z_j, na wyjściu

skrzynki, pod wpływem przetwarzania sygnał pojawia się sygnał y_i — tak jak przedstawior symbolicznie na ryc. 21. Przy takim podejści automatu jako do „czarnej skrzynki” nie zwra uwagi na strukturę wewnętrzną automatu, a interesuje nas tylko charakter przetwarzania informacji. Zwykle przyjmuje się, że sygnał z_j, pojawiający się na wejściu automatu, przynależy do pewnego : czonego zbioru możliwych dla automatu sygr wejściowych



Ryc. 21

$$Z = \{z_1, z_2, ..., z_j, ..., z_s\}$$

Natomiast sygnał y_i pojawiający się na wyjściu matu przynależy do zbioru możliwych dla auto sygnałów wyjściowych

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_w\}$$

przy czym zbiór ten jest również zbiorem skończo W automacie skończonym sygnał y_i pojawiając na wyjściu automatu zależy nie tylko od syg wejściowego, lecz również od tzw. stanu we trznego automatu. W trakcie swego działania aut może znajdować się w różnych stanach we trznych. Podobnie jak w automacie, tak i w ka organizmie żywym możemy wyróżnić aktualny w nej chwili dla tego organizmu jego stan wewnęt Na przykład, człowiek może znajdować się w róż stanach: może być senny, głodny, syty, zdene wany, zadowolony itp. Stany wewnętrzne autor tworzą zbiór

$$Q = \{q_1, q_2, ..., q_s, ..., q_k\}$$

Zbiór ten jest zbiorem skończonym i jest nazywany zbiorem stanów wewnętrznych automatu.

Praca automatu skończonego przebiega w ściśle określonych chwilach czasu: t_0, t_1, t_2, ... noszących nazwę czasów dyskretnych. W każdej chwili czasu dyskretnego na wejściu automatu pojawia się sygnał z_j, ustala się określony stan wewnętrzny automatu, a na wyjściu pojawia się jeden z sygnałów wyjściowych przynależnych do zbioru Y. Po tych wstępnych sformułowaniach możemy podać dokładniejszą definicję automatu skończonego. Definicja ta brzmi następująco: automatem skończonym nazywamy dyskretny przetwornik informacji zdolny do przyjmowania różnych stanów, do przechodzenia pod wpływem sygnałów wejściowych z jednego stanu w inny i do generowania sygnałów wyjściowych — przy czym zbiór możliwych stanów zawiera skończoną liczbę elementów.

Sygnały wejściowe automatu są informacją wejściową, natomiast sygnały wyjściowe reprezentują informację przetworzoną przez automat. Informacja przetworzona wyraża najczęściej pewne decyzje wypracowane przez automat. Aby decyzje te były optymalne dla dowolnej sytuacji, w jakiej automat się znajduje, jego działanie musi być ściśle określone. Stąd też automat skończony działa zgodnie z pewnym programem, uwarunkowanym strukturą automatu lub też przechowywanym w odpowiedniej postaci w jego pamięci. Program taki składa się z systemu rozkazów, które mogą być wykonywane przez automat. Każdy rozkaz jest jak gdyby wskazówką dla automatu, mówiącą co on ma zrobić. Rozkaz można zapisać w postaci

$$q_i z_r \longrightarrow q_j y_s$$

Zapis ten interpretujemy następująco: jeżeli automat znajduje się w stanie wewnętrznym q_i, a na wejście automatu podany zostanie sygnał z_r, to pod wpływem tego sygnału automat przechodzi w stan q_j i generuje sygnał wyjściowy y_s. Działanie automatu skończonego można wyrazić również analitycznie przy pomocy dwóch funkcji, tzw. funkcji przejść i funkcji wyjść automatu. Funkcja przejść automatu skończonego ma następującą postać

$$q(t+1) = \Psi[q(t), z(t)] \qquad (5.4)$$

Funkcja ta mówi nam, że stan wewnętrzny automatu w chwili dyskretnej $t+1$ zależy od stanu automatu $q(t)$ w poprzedniej chwili t i od sygnału wejściowego $z(t)$ przyłożonego na wejście automatu w chwili t. Funkcja wyjść automatu skończonego jest natomiast wyrażona następującą postacią

$$y(t) = \Phi[q(t), z(t)] \qquad (5.5)$$

Zgodnie z tym wyrażeniem sygnał wyjściowy automatu $y(t)$, a więc w chwili t, zależny jest od stanu wewnętrznego i sygnału wejściowego w tej samej dyskretnej chwili t.

Najczęściej ze względów praktycznych działanie automatu zadaje się przy pomocy dwóch tablic: tablicy przejść, która określa funkcję przejść $\Psi(q, z)$, i tablicy wyjść, która określa funkcję wyjść $\Phi(q, z)$. Wiersze obu tablic są oznaczone sygnałami wejściowymi automatu $z_j \in Z$, a kolumny — stanami wewnętrznymi automatu $q_s \in Q$.

Tablice te przedstawimy na przykładzie pewnego automatu abstrakcyjnego A. Załóżmy, że dla automatu A znany jest zbiór sygnałów wejściowych $Z = \{z_1, z_2\}$, zbiór sygnałów wyjściowych $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ oraz zbiór stanów wewnętrznych $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$. Tablica przejść i tablica wyjść

automatu A, wyrażające tylko jedno z możliwych działań tego automatu, będą przedstawiać się następująco

Tabl. 1

Tablica przejść $\psi(q, z)$

z \ q	q_1	q_2	q_3
z_1	q_3	q_3	q_1
z_2	q_2	q_3	q_3

Tabl. 2

Tablica wyjść $\Phi(q, z)$

z \ q	q_1	q_2	q_3
z_1	y_2	y_1	y_2
z_2	y_3	y_3	y_3

Na podstawie tablicy przejść można określić, jakie są możliwe przejścia automatu z danego stanu do innego stanu pod wpływem sygnałów wejściowych. Na przykład, jeżeli w danej chwili t automat znajduje się w stanie q_1, to w kolumnie opisanej symbolem q_1 znajdziemy wszystkie te stany, do których automat może przejść bezpośrednio ze stanu q_1. Z przedstawionej tablicy przejść wynika, że jeżeli automat znajduje się w stanie q_1, a na wejściu automatu pojawi się sygnał z_1, to przechodzi on do stanu q_3, gdy natomiast pojawi się sygnał z_2, automat przechodzi do stanu q_2.

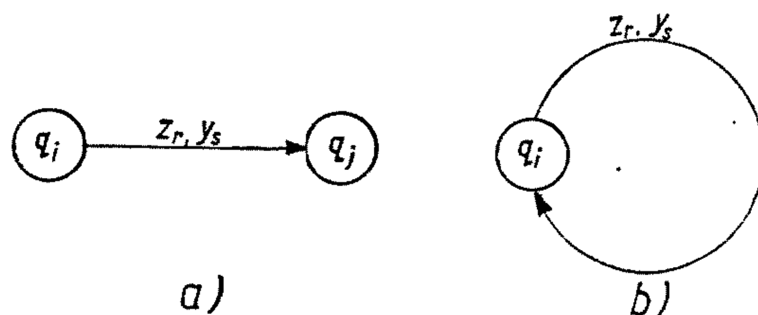
Tak jak na podstawie tablicy przejść można określić, do jakiego stanu może przejść automat w trakcie swego funkcjonowania, tak na podstawie tablicy wyjść można określić, jaki sygnał pojawi się na wyjściu automatu, gdy automat znajduje się w danym stanie q, a na jego wejściu pojawi się jeden z sygnałów wejściowych $z_j \in Z$. Z podanej jako przykład tablicy wyjść wynika, że gdy automat znajduje się w stanie q_1, a na wejściu pojawi się sygnał z_1, to na wyjściu automatu pojawi się sygnał y_2.

Automat skończony, zadany przedstawionymi wyżej tablicami przejść i wyjść, realizuje następujące rozkazy

1) $q_1z_1 \to q_3y_2$ 3) $q_2z_1 \to q_3y_1$ 5) $q_3z_1 \to q_1y_2$
2) $q_1z_2 \to q_2y_3$ 4) $q_2z_2 \to q_3y_3$ 6) $q_3z_2 \to q_3y_3$

Rozkazy te tworzą program działania automatu.

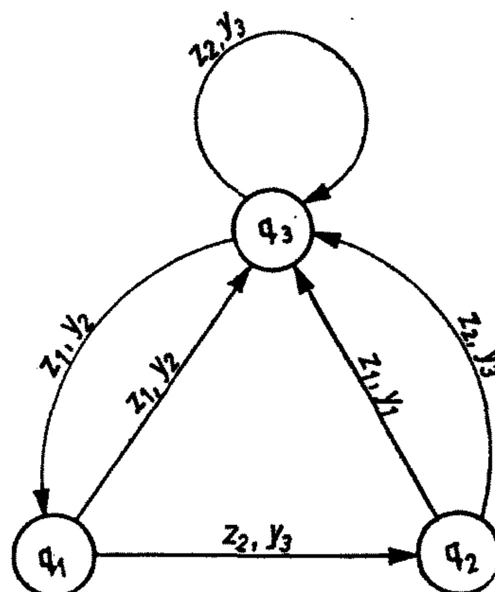
Bardzo często zamiast posługiwania się tablicami przejść i wyjść, działanie automatu wyraża się przy pomocy specjalnego wykresu. Wykres taki nosi nazwę grafu automatu. W grafie automatu wierzchołki grafu przedstawiają stany automatu, a krawędzie są opisane symbolami sygnałów wejściowych i wyjściowych. Graf automatu jest kompozycją pewnej liczby grafów elementarnych. Dwa najbardziej typowe grafy elementarne przedstawiono na ryc. 22. Każdy graf elementarny jest odpowied-



Ryc. 22

nikiem rozkazu wykonywanego przez automat. Graf elementarny z ryc. 22 *a* realizuje rozkaz $q_iz_r \to q_jy_s$, a graf z ryc. 22 *b* realizuje rozkaz $q_iz_r \to q_iy_s$, z którego wynika, że pod wpływem sygnału z_r automat nie zmienia swego stanu q_i. Kompletny graf automatu zadanego przedstawionymi wyżej tablicami przejść i wyjść pokazano na ryc. 23.

Automaty skończone jako dyskretne przetworniki informacji można odpowiednio podzielić w zależności od sposobu ich działania, struktury wewnętrznej, funkcji, jakie spełniają itp. Najbardziej utarty jest



Ryc. 23

podział automatów skończonych na tzw. automaty Mealy'ego i automaty Moore'a. Kryterium tego podziału jest postać funkcji przejść i wyjść opisujących działanie danego automatu. Automat Mealy'ego działa zgodnie z opisującą go parą funkcji przejść i wyjść podanych w postaci wyrażeń (5.4) i (5.5). Zasadnicza właściwość automatów Mealy'ego polega na tym, że ich sygnały wyjściowe zależą zarówno od stanu wewnętrznego automatu, jak i od sygnału wejściowego. Dotychczas omawiany przez nas typ automatu skończonego był właśnie automatem Mealy'ego.

Automat Moore'a tym się różni od poprzedniego, że jego sygnał wyjściowy nie zależy od sygnału wejściowego, lecz tylko od stanu wewnętrznego automatu. Automat Moore'a jest opisany następującą parą funkcji przejść i wyjść

$$q(t+1) = \Psi[q(t), z(t)] \quad (5.6)$$

$$y(t) = \Phi[q(t)] \quad (5.7)$$

Funkcje te najczęściej są zadawane odpowiednią tablicą, noszącą nazwę oznakowanej tablicy przejść. Dla ilustracji, oznakowana tablica przejść automatu Moore'a dotycząca pewnego abstrakcyjnego automatu została przedstawiona niżej

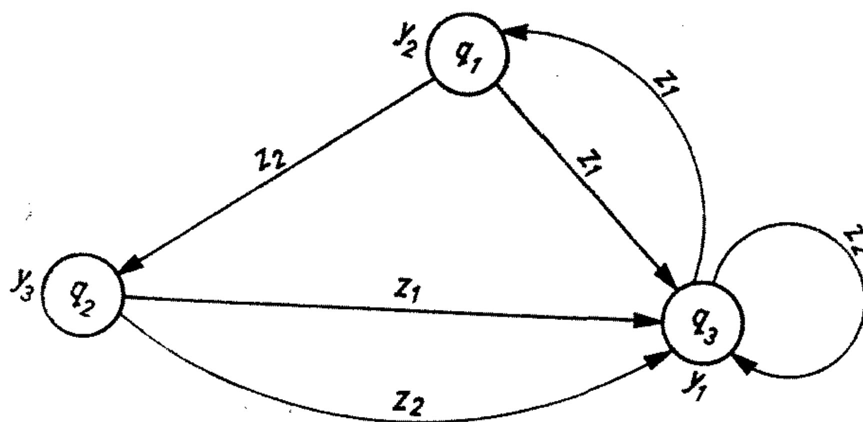
Tabl. 3
Oznakowana tablica przejść

sygnał wyjściowy	y_2	y_3	y_1
z \\ q	q_1	q_2	q_3
z_1	q_3	q_3	q_1
z_2	q_2	q_3	q_3

Istnieje pewne podobieństwo między oznakowaną tablicą przejść automatu Moore'a a omówioną już tablicą przejść automatu Mealy'ego.

Obie tablice zbudowane są podobnie, z tą różnicą, że w oznakowanej tablicy przejść automatu Moore'a nad symbolem każdego stanu wewnętrznego opisującego kolumnę tablicy zapisuje się sygnał wyjściowy, jaki generuje automat w tym stanie. Działanie automatu Moore'a, podobnie jak automatu Mea-

ly'ego, można wyrazić graficznie przy pomocy odpowiedniego grafu. Graf automatu Moore'a, wyrażający działanie automatu zadanego przedstawioną już wyżej oznakowaną tablicą przejść (tabl. 3), zilustrowano na ryc. 24. Jak wynika z rysunku,



Ryc. 24

krawędzie grafu automatu Moore'a są opisane tylko symbolami sygnałów wejściowych automatu, natomiast wierzchołki grafu są opisane stanami wewnętrznymi automatu oraz sygnałami wyjściowymi automatu. Znaczy to, że w automacie Moore'a każdy stan wewnętrzny $q_s \in Q$ ma przyporządkowany sobie tylko jeden sygnał wyjściowy automatu. A więc, gdy np. automat znajduje się w stanie q_3, to zgodnie z ryc. 24 na wyjściu automatu mamy sygnał wyjściowy y_1, bez względu na to, jaki sygnał wejściowy $z_j \in Z$ spowodował przejście automatu w stan q_3.

Omówione automaty skończone typu Mealy'ego i Moore'a charakteryzują się zdolnością do pamiętania swych stanów wewnętrznych. Automaty, które zdolne są do pamiętania swych stanów wewnętrznych, noszą nazwę automatów z pamięcią. Oprócz nich istnieją automaty bez pamięci, czyli

bez zdolności pamiętania swych stanów, i realizujące pewne funkcje przełączające. Dalsze nasze rozważania ograniczymy tylko do automatów z pamięcią, gdyż taki jest automat rozgrywający, będący celem niniejszej charakterystyki.

Elementy struktury automatu skończonego

Automat skończony jest urządzeniem technicznym mającym odpowiednią strukturę. Struktura ta powinna zapewniać działanie automatu zgodnie z opisującą to działanie funkcją przejść i wyjść. W strukturze automatu skończonego z pamięcią wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje elementów: elementy logiczne i elementy pamięciowe.

Elementy logiczne odpowiednio połączone ze sobą tworzą jak gdyby pewną sieć przełączającą, natomiast elementy pamięciowe tworzą pamięć automatu. Strukturę automatu, jak również uwarunkowane tą strukturą działanie automatu, można odpowiednio opisać korzystając z aparatu formalnego logiki matematycznej, a ściślej mówiąc, korzystając tylko z jednego z jej działów, noszącego nazwę dwuelementowej algebry Boole'a. Algebra Boole'a (dwuelementowa) obejmuje działania logiczne przeprowadzane na stałych i zmiennych przyjmujących tylko dwie wartości: 1 lub 0, przy czym wyniki działań nad tymi wielkościami przyjmują również tylko dwie wartości: 1 lub 0. Przez analogię do rachunku zdań wartość „1" odpowiada wielkości logicznej „prawda", a wartość „0" odpowiada wielkości logicznej „fałsz".

W algebrze Boole'a zmienne, nad którymi przeprowadza się działania logiczne, noszą nazwę zmiennych boolowskich i są oznaczone najczęściej małymi literami alfabetu łacińskiego: a, b, c, ..., x,

y, z. Spośród szeregu działań logicznych istniejących w algebrze Boole'a wyróżnia się trzy podstawowe, a mianowicie: sumę logiczną, iloczyn logiczny i negację. Działania te mają swoje odpowiednie oznaczenia. Na przykład sumę logiczną dwóch zmiennych x, y oznacza się symbolicznie $x \vee y$, gdzie znak $\vee$ nosi nazwę spójnika logicznego „lub". Podobnie iloczyn logiczny dwóch zmiennych x, y oznacza się jako $x \cdot y$, przy czym znak mnożenia (kropka) nosi w tym przypadku nazwę spójnika logicznego „i"; bardzo często do oznaczenia spójnika logicznego „i" stosuje się również znak $\wedge$, np. $x \wedge y$. Natomiast negację zmiennej x oznacza się symbolem $\bar{x}$, co odczytuje się jako „nie x", gdyż kreska nad symbolem x wyraża spójnik logiczny „nie". Wymienione trzy działania logiczne możemy scharakteryzować przy pomocy następujących tablic

Tabl. 4

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabl. 5

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabl. 6

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

W wierszach tablic reprezentujących sumę i iloczyn logiczny podano możliwe kombinacje wartości zmiennych x i y oraz odpowiadające tym kombinacjom wartości odpowiednio sumy i iloczynu logicznego. Z przedstawionych tablic wynika, że omawiane działania logiczne przypominają nieco działania arytmetyczne, są jednak znacznie od nich prostsze.

Algebra Boole'a jest teorią aksjomatyczną; oznacza to, że w algebrze Boole'a istnieje pewna liczba twierdzeń pierwotnych — aksjomatów — na których oparte są wszystkie prawa rządzące tą teorią.

Najbardziej elementarne aksjomaty algebry Boole'a przedstawiają się następująco

dla sumy logicznej	dla iloczynu logicznego
$0 \vee x = x$	$0 \cdot x = 0$
$1 \vee x = 1$	$1 \cdot x = x$
$x \vee x = x$	$x \cdot x = x$
$x \vee x \vee \ldots \vee x = x$	$x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x$
$x \vee \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$

Spośród wielu praw algebry Boole'a podstawowe znaczenie mają prawa przemienności, łączności, rozdzielności i De Morgana. Prawa te przedstawiają się następująco

Prawo przemienności

$$x \cdot y = y \cdot x$$
$$x \vee y = y \vee x$$

Prawo łączności

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

Prawo rozdzielności

$$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$$
$$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$$

Prawo De Morgana

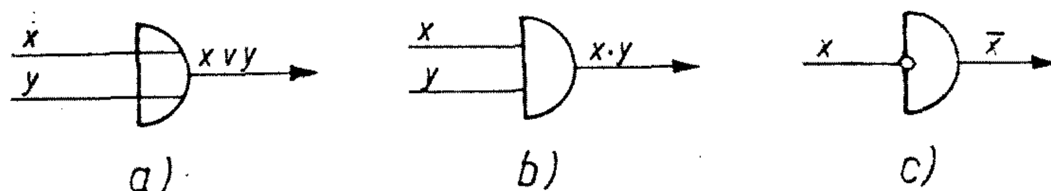
$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$
$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

W algebrze Boole'a słuszne są te same prawa przemienności i łączności, co w zwykłej algebrze, ułatwia to znacznie proces przekształcenia wyrażeń boolowskich. Wyrażenia boolowskie tworzą zmienne boolowskie połączone odpowiednimi spójnikami logicznymi. Wyrażenia boolowskie możemy odpowiednio przekształcać w celu uzyskania najbardziej zminimalizowanej postaci tych wyrażeń. Na przykład — korzystając z podanych wyżej aksjomatów — bardzo łatwo udowodnić słuszność następującego przekształcenia

$$\begin{aligned}(x \vee y) \cdot (x \vee z) &= x \cdot x \vee x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z = \\ &= x \vee x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z = \\ &= x(1 \vee y \vee z) \vee y \cdot z = \\ &= x \vee y \cdot z\end{aligned}$$

Działania logiczne sumy, iloczynu i negacji mogą być realizowane za pomocą odpowiednich układów elektronicznych. Do budowy tych układów wykorzystuje się najczęściej diody półprzewodnikowe, tranzystory, rdzenie ferromagnetyczne. Układy elektroniczne, realizujące najprostsze operacje logiczne sumy, iloczynu, negacji, noszą nazwę elementów logicznych, bramek lub funktorów „lub", „i", „nie". Dla elementów logicznych realizujących działania logiczne zmiennymi boolowskimi są sygnały elektryczne, pojawiające się na odpowiednich przewodach. Sygnały te mają postać odpowiednich impulsów prądu lub napięcia. Obecność impulsu w obwodzie może oznaczać wielkość logiczną „1", a brak impulsu w obwodzie może oznaczać wielkość logiczną „0". Wielkości logiczne 0 i 1 nazywa się po prostu w tym przypadku sygnałami 0 i 1 lub bitami (bit oznacza elementarną jednostkę informacji).

Elementy logiczne mają swe odpowiednie oznaczenia graficzne, dzięki którym abstrahuje się od ich struktury, a rozpatruje się tylko ich funkcjonalność. Dla ilustracji na ryc. 25 przedstawiono oznaczenia



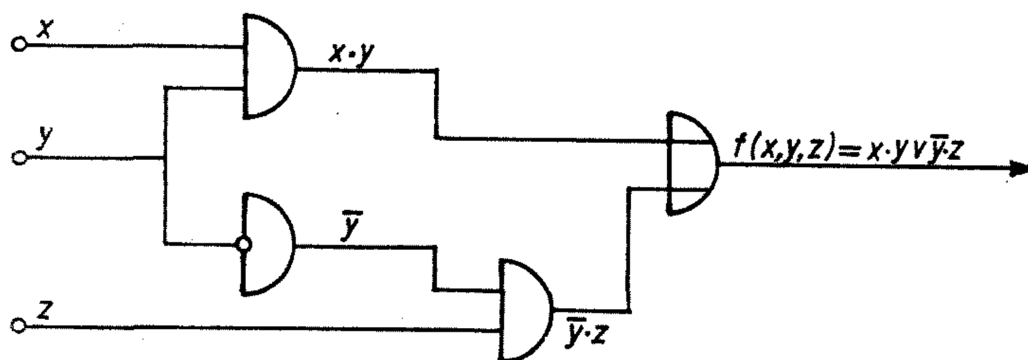
Ryc. 25

elementów logicznych będących funktorami typu „lub", „i" oraz „nie". Funktor „lub" (ryc. 25 *a*), nazywany również bramką typu „lub", działa w ten sposób, że na jego wyjściu pojawia się sygnał jedynkowy — tzn. reprezentujący wielkość logiczną 1 — wtedy, gdy co najmniej na jednym z wejść istnieje sygnał 1. Wejścia funktora „lub" oznaczone na ryc. 25 *a* symbolami x, y reprezentują zmienne boolowskie przyjmujące wartość 0 lub 1 w zależności od typu sygnału, jaki pojawia się na danym wejściu.

Funktor „i" (ryc. 25 *b*), nazywany często bramką typu „i", działa w ten sposób, że na jego wyjściu sygnał 1 pojawia się tylko wtedy, gdy sygnały na wszystkich jego wejściach — w rozpatrywanym przypadku na wejściach x i y — są równe 1. Bramki typu „i", jak również bramki typu „lub", mogą mieć więcej niż dwa wejścia, przy czym, niezależnie od ilości wejść, obowiązują te same zasady logiczne. Trzeci podstawowy element logiczny, funktor „nie" (ryc. 25 *c*) nazywany inwertorem, działa w ten sposób, że odwraca sygnał, który jest podawany na jego wejście. Jeżeli na wejście przychodzi sygnał 0, na wyjściu pojawia się sygnał 1. Podobnie jeżeli na wejściu będzie 1, to na wyjściu będzie 0.

Elementy logiczne „lub", „i", „nie" można odpowiednio ze sobą łączyć. Uzyskuje się w ten sposób układ logiczny, który w zależności od liczby funktorów i sposobu ich połączenia realizuje mniej lub bardziej złożoną funkcję logiczną, zadaną odpowiednim wyrażeniem boolowskim. Funkcję realizowaną przez układ logiczny nazywamy funkcją boolowską lub funkcją przełączającą. W ogólnym przypadku funkcja przełączająca (boolowska) jest funkcją n-argumentową, np. typu $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, charakteryzującą się tym, że zarówno ona, jak i jej argumenty mogą przyjmować tylko dwie wartości: 0 lub 1.

Dla przykładu na ryc. 26 przedstawiono układ logiczny realizujący funkcję przełączającą $f(x, y, z)$, zadaną wyrażeniem boolowskim $x \cdot y \vee \bar{y} \cdot z$. Łącząc odpowiednio między sobą proste układy logiczne, takie jak układ z ryc. 26, można otrzymać



Ryc. 26

układ logiczny bardziej złożony, o większej liczbie wejść i wyjść, a więc układ, który realizuje kilka funkcji przełączających.

Układy zbudowane z elementów logicznych określa się często mianem układów kombinacyjnych, gdyż przez zmianę kombinacji elementów logicznych w tych układach można realizować różne funkcje

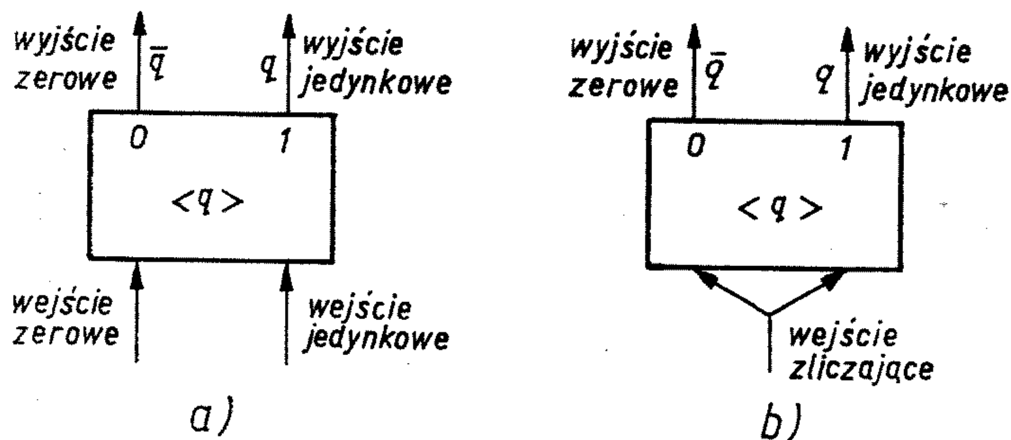
przełączające. Sygnały na wyjściach układów kombinacyjnych są jednoznacznie określone tylko przez sygnały pojawiające się na ich wejściach. W układach tych nie istnieją żadne zależności od czasu, znaczy to, że na sygnał wyjściowy w danej chwili t nie mają wpływu sygnały, które pojawiły się na wejściu układu w chwili poprzedniej $t-1$.

Układy kombinacyjne są nieodzowną częścią składową struktury każdego automatu skończonego, gdyż jest on urządzeniem działającym w sposób logiczny, a układy kombinacyjne zbudowane z elementów logicznych zapewniają właśnie takie działanie automatu. Układy kombinacyjne tworzą w automacie jak gdyby sieć przełączającą. Sieć ta zapewnia właściwy obieg informacji wewnątrz automatu, zamykając jedne, a otwierając inne drogi przepływu sygnału tak, aby działanie automatu było zgodne z opisującą je tablicą przejść i wyjść — dla automatu Mealy'ego, lub oznakowaną tablicą przejść — w przypadku automatu Moore'a.

Drugim rodzajem elementów występujących w strukturze automatu skończonego są elementy pamięciowe. Elementy pamięciowe tworzą pamięć automatu. Pamięć ta służy do zapamiętania stanów wewnętrznych automatu, co jest jednoznaczne z pamiętaniem przetwarzanej informacji wejściowej. Najbardziej typowym elementem pamięciowym jest układ elektroniczny noszący nazwę przerzutnika. Przerzutnik stanowi elementarną mikrokomórkę pamięciową i służy do wielokrotnego zapamiętania jednobitowej informacji, np. wartości jednej zmiennej boolowskiej z jednoczesnym zapamiętaniem negacji tej zmiennej. Przerzutnik może znajdować się tylko w jednym z dwóch stanów, tj. w stanie 1 lub w stanie 0. Przerzutnik jest budowany najczęściej na dwóch tranzystorach, ale może być wykonany również na

rdzeniach ferrytowych lub na innych elementach fizycznych. Zasada pracy przerzutnika wykonanego na tranzystorach polega na tym, że gdy jeden z tranzystorów przewodzi, to drugi jest zatkany i w zależności od tego, który z nich przewodzi, mówimy, że przerzutnik znajduje się w stanie 1 lub 0.

Przerzutnik, podobnie jak wymienione poprzednio elementy logiczne, ma swoje odpowiednie oznaczenie symboliczne, które przedstawiono na ryc. 27.



Ryc. 27

Przerzutnik jako element pamięciowy posiada dwa wyjścia: jedynkowe i zerowe oraz dwa, trzy lub tylko jedno wejście. Najczęściej stosuje się przerzutnik z dwoma wejściami rozdzielonymi (ryc. 27 *a*) i przerzutnik z tzw. wejściem zliczającym (ryc. 27 *b*). Najpierw rozpatrzymy przerzutnik z dwoma wejściami rozdzielonymi. Na wejścia tego przerzutnika przykładane są sygnały zero-jedynkowe. Sygnał jedynkowy reprezentowany jest dodatnim impulsem napięcia, a sygnał zerowy — ujemnym impulsem napięcia lub zerowym napięciem. Sygnał jedynkowy nosi w tym przypadku nazwę sygnału wyzwalającego. Pojawianie się tego sygnału na wejściu jedynkowym powoduje, że przerzutnik przechodzi w stan 1 i znaj-

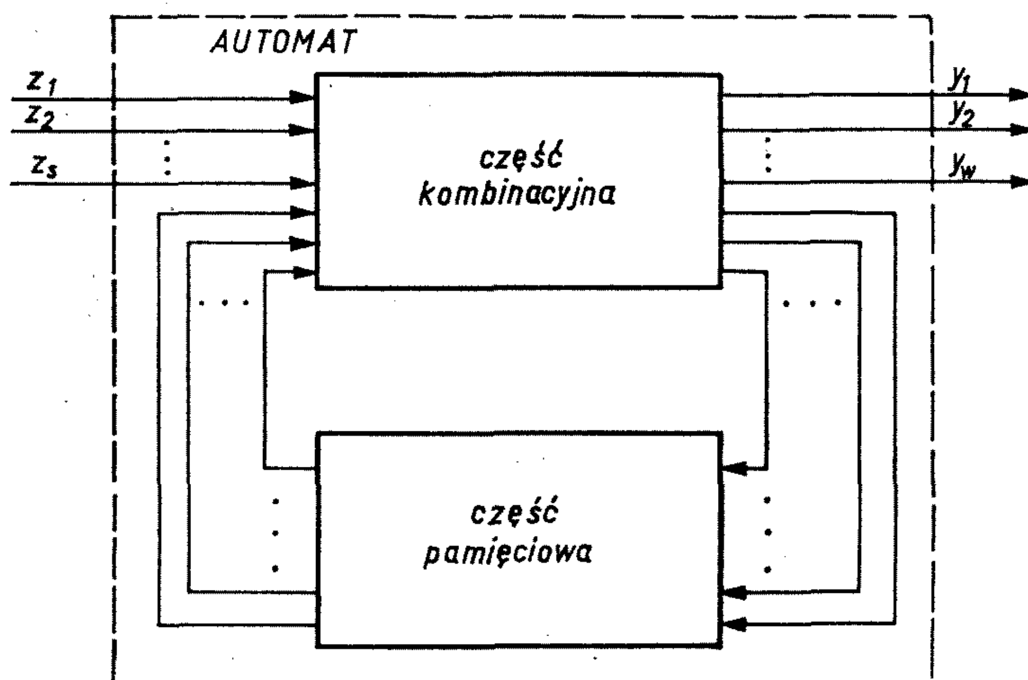
duje się w nim dotąd, aż z kolei na wejściu zerowym nie pojawi się sygnał jedynkowy. Pojawienie się sygnału jedynkowego na wejściu zerowym powoduje przejście przerzutnika ze stanu 1 w stan 0. Jeżeli przerzutnik znajduje się w stanie 1, to na jego wyjściu jedynkowym istnieje wysoki poziom potencjału, reprezentujący sygnał potencjałowy 1; jeżeli przerzutnik znajduje się w stanie 0, to na jego wyjściu jedynkowym istnieje niski poziom potencjału, przedstawiający sygnał potencjałowy 0. Gdy przyjmiemy, że stan przerzutnika reprezentuje wartość zmiennej boolowskiej q, to w stanie 1 na wyjściu jedynkowym przerzutnika istnieje sygnał $q = 1$, a w stanie 0 — sygnał $q = 0$.

Drugi typ przerzutnika działa w ten sposób, że każdy kolejny impuls jedynkowy pojawiający się na wejściu zmienia stan przerzutnika na przeciwny. Jeżeli więc stanem początkowym przerzutnika jest stan 0, to pierwszy impuls jedynkowy powoduje przejście przerzutnika w stan 1, drugi impuls w stan 0, trzeci impuls w stan 1 itd. Ze względu na działanie przerzutników tego typu używa się do budowy liczników binarnych, tj. liczników służących do zliczania impulsów jedynkowych pojawiających się na wejściu danego układu, przy czym liczbę zliczanych impulsów wyraża się wówczas liczbą dwójkową (binarną).

W automacie skończonym do zapamiętania stanów wewnętrznych automatu najczęściej są wykorzystywane przerzutniki z dwoma wejściami rozdzielonymi. Wykorzystane do tego celu przerzutniki noszą nazwę automatów elementarnych i jako takie są automatami typu Moore'a. Uzasadnione jest to tym, że przerzutnik może znajdować się w jednym z dwóch stanów wewnętrznych, które jednoznacznie określają sygnały wyjściowe, a więc jest automatem

Moore'a. Zbiór automatów elementarnych (przerzutników) w automacie skończonym stanowi pamięć automatu. W pamięci tej stany wewnętrzne określonej grupy automatów elementarnych określają stan wewnętrzny danego automatu skończonego.

Przerzutniki jako elementy pamięciowe oraz omówione już wyżej elementy logiczne są podstawowymi cegiełkami struktury automatu skończonego. Ze względu na te dwa podstawowe rodzaje elementów, w strukturze automatu skończonego wyodrębnia się dwie części składowe: część pamięciową i część kombinacyjną. Schemat blokowy automatu z uwzględnieniem tych dwóch części został przedstawiony na ryc. 28. Widzimy, że część kombina-



Ryc. 28

cyjna jest jak gdyby siecią sprzężeń zwrotnych automatu, zapewniającą jego właściwe funkcjonowanie zgodnie z opisującymi go funkcjami wejść wyjść. Zadanie związane z określeniem dokładnej

struktury konkretnego automatu nosi nazwę syntezy strukturalnej, lecz wykracza ona poza ramy niniejszej książki.

Działanie i struktura automatu rozgrywającego

Pod terminem „automat rozgrywający” będziemy rozumieć taki automat skończony, który działa zgodnie z regułami dwuosobowej gry wielochodowej. W interesujących nas problemach sterowania, opisywanych modelem matematycznym gry wielochodowej, automat rozgrywający reprezentuje jedną ze stron gry, a więc rozgrywa grę na korzyść jednego z graczy. Na przykład w procesie sterowania systemem automat rozgrywający, jako gracz A, będzie reprezentował organ sterujący systemu, natomiast graczem B będzie pozostała, sterowana część systemu z uwzględnieniem pewnych własności otoczenia. W automacie rozgrywającym zbiorem sygnałów wejściowych automatu jest zbiór wszystkich możliwych strategii chodowych strony B gry. Podobnie zbiorem sygnałów wyjściowych tego automatu jest zbiór wszystkich możliwych strategii chodowych strony A gry. Zbiory te, oznaczone symbolami Z i Y, mają postać określoną wyrażeniem (5.1) i (5.2).

Podstawowym zadaniem automatu rozgrywającego jest wypracowywanie optymalnych strategii chodowych dla gracza A. Sygnał wyjściowy automatu rozgrywającego $y_i \in Y$, reprezentujący strategię chodową gracza A, zależy od aktualnej sytuacji powstałej w procesie realizacji gry po ostatnim poprzedzającym tę sytuację ruchu wykonanym przez gracza B. Sytuacja powstała w grze wielochodowej, jak już wiadomo, reprezentuje sekwencję doko-

nanych przez graczy wyborów strategii chodowych we wszystkich ruchach poprzedzających tę sytuację. Wiadomo również, że automat rozgrywający powinien działać zgodnie z jednostronnie zoptymalizowanym na korzyść gracza A dendrytem danej gry wielochodowej. W celu zapewnienia takiego działania, każdej sytuacji, która powstała w grze po ruchu wykonanym przez gracza B, powinien być przyporządkowany odpowiedni stan wewnętrzny automatu. Wszystkie możliwe stany wewnętrzne automatu tworzą zbiór stanów wewnętrznych Q o postaci zadanej wyrażeniem (5.3) — zbiór ten rzutuje na pamięć automatu.

Automat rozgrywający, podobnie jak każdy inny automat skończony, działa w dyskretnych chwilach t_1, t_2, ..., t_j, ...,. W tym przypadku chwile oznaczają te momenty czasu, w których gracz B wykonuje w grze poszczególne swoje ruchy. Ponieważ każdy ruch gracza B zapoczątkowuje kolejne posunięcie w grze, celowo jest zastąpić dyskretne chwile numerami porządkowymi kolejnych posunięć w grze. Symbolem kolejnych posunięć w grze jest więc liczba naturalna $n = 1, 2, ..., m$.

Działanie automatu rozgrywającego najdogodniej jest wyrazić następującą parą funkcji przejść i wyjść

$$q(n+1) = \Psi[q(n), z(n+1)] \tag{5.8}$$

$$y(n) = \Phi[q(n)] \tag{5.9}$$

gdzie: $q(n)$ — stan wewnętrzny automatu po posunięciu n,
$z(n+1)$ — sygnał na wejściu automatu w posunięciu $n+1$,
$y(n)$ — sygnał na wyjściu automatu po posunięciu n.

Zgodnie z przedstawioną funkcją wyjść, sygnał wyjściowy automatu $y(n) \in Y$, tj. po posunięciu n, nie zależy od sygnału wejściowego, lecz tylko od stanu wewnętrznego automatu po posunięciu n. Ze względu na tak zadaną funkcję wyjść, automat rozgrywający jest automatem typu Moore'a.

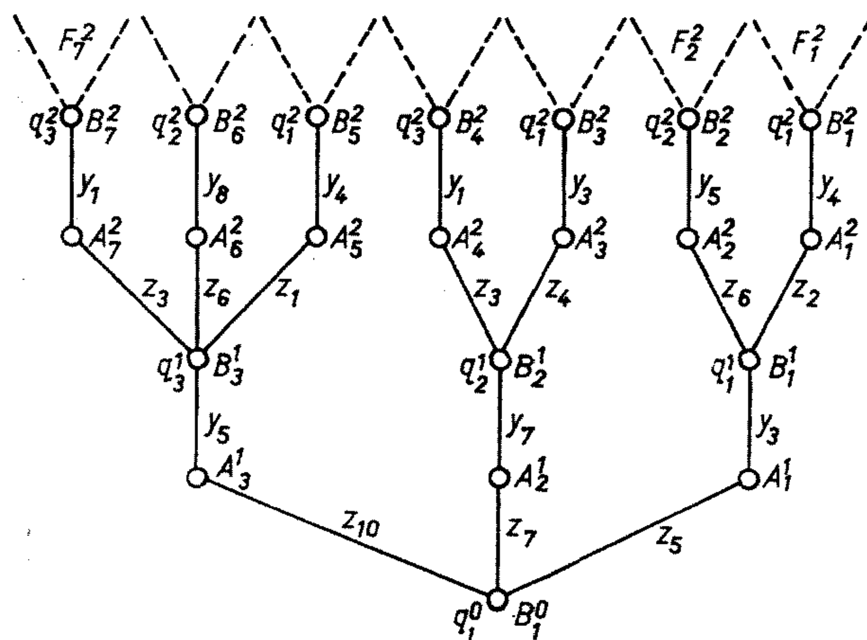
Jak wiadomo, graficznym obrazem działania automatu skończonego jest graf automatu. Ponieważ algorytm działania automatu rozgrywającego jest zawarty w opisie jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry, graf automatu rozgrywającego odzwierciedla strukturę jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Przykładowy graf automatu rozgrywającego został przedstawiony na ryc. 29

Ryc. 29

i, jak to widać z rysunku, opis wierzchołków i krawędzi tego grafu jest zgodny ze sposobem opisu grafu automatu Moore'a (por. ryc. 24). Krawędzie grafu automatu rozgrywającego, opisane elementami $z_j \in Z$, reprezentują strategie chodowe gracza B i jednocześnie sygnały wejściowe automatu, natomiast wierzchołki grafu odpowiadają stanom wewnętrznym automatu i wyrażają sytuacje w grze. Każdemu wierzchołkowi grafu, z wyjątkiem wierzchołka po-

cząstkowego, jest przyporządkowany sygnał wyjściowy automatu $y_i \in Y$, będący strategią chodową gracza A w sytuacji określonej danym wierzchołkiem. Wierzchołek początkowy grafu, oznaczony symolem q^0, określa stan początkowy automatu; w stanie tym, odpowiadającym sytuacji początkowej w grze, automat nie generuje żadnego sygnału wyjściowego.

Ze względu na wyraźne podobieństwo struktury grafu automatu rozgrywającego do odpowiadającego mu jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry, ten ostatni można potraktować jako graf automatu, po uprzednim opisaniu każdego wierzchołka typu B_r^n w dendrycie odpowiednim stanem wewnętrznym automatu. Opisany w powyższy sposób jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry, reprezentujący graf



Ryc. 30

automatu, został przedstawiony poglądowo na ryc. 30. Zgodnie z tym rysunkiem, wierzchołek początkowy dendrytu, oznaczony symbolem B_1^0, jest jednocześnie stanem początkowym automatu q_1^0. Z chwilą poja-

wienia się na wejściu automatu sygnału z_5, automat przechodzi ze stanu początkowego q^0_1 w stan q^1_1, a następnie, znajdując się już w stanie q^1_1, generuje sygnał wyjściowy y_3. Podobnie, gdy w stanie q^0_1 na wejściu automatu pojawi się sygnał z_7 lub z_{10}, automat przechodzi ze stanu q^0_1 odpowiednio w stan q^1_2 lub q^1_3 i generuje sygnał y_7 lub y_5.

Przy rozpatrywaniu jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry jako grafu automatu pomija się wierzchołki A^n_r, a elementy y_i opisujące krawędzie wychodzące z tych wierzchołków przyporządkowuje się umownie tym wierzchołkom B^n_r, do których te krawędzie dochodzą. Na przykład element y_3 opisujący krawędź wychodzącą z wierzchołka A^1_1 należy przyporządkować umownie wierzchołkowi B^1_1, który reprezentuje stan wewnętrzny automatu q^1_1.

Oznaczenia wierzchołków typu B^n_r jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry dokonuje się w procesie syntezy strukturalnej automatu rozgrywającego. Synteza strukturalna obejmuje wszystkie czynności związane z określeniem struktury automatu rozgrywającego. Przeprowadzenie syntezy strukturalnej automatu rozgrywającego jest na ogół zagadnieniem złożonym. Punktem wyjściowym tej syntezy jest jednostronnie zoptymalizowany na korzyść automatu (gracza A) dendryt danej gry wielochodowej. Proces syntezy sprowadza się do operacji logicznych na zbiorach symboli opisujących krawędzie i wierzchołki jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Zbiory te zwykle dzieli się na odpowiednie podzbiory, według ściśle określonych kryteriów tego podziału, np. podział zbioru Z według pięter dendrytu (por. wyrażenie 3.3). Celem tych operacji jest określenie stanów wewnętrznych automatu oraz funkcji przełączających wejść i wyjść automatu.

Na wielu przykładach przeprowadzenia syntezy strukturalnej automatów rozgrywających można stwierdzić, że struktura tego typu automatu skończonego powinna odzwierciedlać w jak największym stopniu strukturę jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Stąd też automat rozgrywający jest automatem wielostopniowym mającym tyle stopni, ile wynosi liczba pięter dendrytu gry, do której rozgrywania automat jest przeznaczony. Każdy stopień automatu wielostopniowego składa się z elementów pamięciowych (przerzutników), określających stan wewnętrzny automatu danego stopnia, i elementów logicznych, realizujących funkcje przełączające. Automat danego stopnia n jest automatem jednostopniowym i przyporządkowany jest n-temu piętru dendrytu gry.

W procesie realizacji gry automat danego stopnia n może przejść ze stanu zerowego q_0^n tylko do jednego ze swych stanów roboczych objętych zbiorem

$$Q_n = \{q_1^n, q_2^n, ..., q_r^n, ..., q_s^n\} \qquad (5.10)$$

Każdy stan wewnętrzny $q_r^n \in Q_n$ automatu jednostopniowego, stopnia n, ma przyporządkowany sobie w postaci przerzutnika oddzielny element pamięciowy oznaczony symbolem $\langle q_r^n \rangle$. Element pamięciowy $\langle q_r^n \rangle$ może znajdować się w stanie 0 lub w stanie 1. Jeżeli w trakcie pracy automatu rozgrywającego, po posunięciu n, element $\langle q_r^n \rangle$ znajduje się w stanie 1, oznacza to, że element $\langle q_r^n \rangle$ jest elementem wyróżnionym w strukturze automatu stopnia n, a stan tego automatu jest q_r^n.

Wyróżniony element pamięciowy automatu n-tego stopnia określa jego aktualny stan wewnętrzny, który przyporządkowany jest jednemu lub kilkunastu naraz wierzchołkom B_r^n n-tego piętra jedno-

stronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Dla przykładu rozpatrzmy jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry przedstawiony na ryc. 30, gdzie pokazano tylko dwa piętra dendrytu. Dla tego dendrytu automaty jednostopniowe stopnia $n = 1$ i $n = 2$ posiadają następujące zbiory stanów wewnętrznych

$$Q_1 = \{q_1^1, q_2^1, q_3^1\}$$
$$Q_2 = \{q_1^2, q_2^2, q_3^2\}$$

W pierwszym piętrze dendrytu każdemu elementowi q_r^1 $(r = 1, 2, 3)$ przyporządkowany jest tylko jeden wierzchołek typu B_r^1. Natomiast inaczej to wygląda w drugim piętrze dendrytu, a mianowicie stan q_1^2 przyporządkowany jest wierzchołkom B_1^2, B_3^2, B_5^2, stan q_2^2 — wierzchołkom B_2^2, B_6^2 i stan q_3^2 — wierzchołkom B_4^2, B_7^2. Podobny sposób przyporządkowania elementów q_r^n wierzchołkom B_j^n obowiązuje również w wyższych piętrach dendrytu (nie przedstawionych na ryc. 30). Przejście automatu danego stopnia n ze stanu początkowego q_0^n do jednego z jego stanów roboczych q_r^n uwarunkowane jest pojawieniem się w posunięciu n na wejściu automatu wielostopniowego ściśle określonego sygnału wejściowego $z_j \in Z$. Zgodnie z regułami prowadzenia gry wielochodowej, w danym posunięciu n na wejściu automatu rozgrywającego może pojawić się tylko jeden sygnał z_j, reprezentujący strategię chodową gracza B i należący do zbioru $Z^n \subset Z$.

Zbiór Z^n, zgodnie z wyrażeniem (3.4), obejmuje takie strategie chodowe gracza B, które są dopuszczalne do wykonania w n-tym posunięciu. W zbiorze Z^n można wyróżnić te elementy z_j, które przy pojawieniu się ich w posunięciu n na wejściu auto-

matu wielostopniowego powinny powodować przejście automatu stopnia n ze stanu q^n_0 zawsze w jeden i ten sam stan roboczy q^n_r. Wyróżnione w ten sposób elementy z_j stanowią pewien podzbiór zbioru Z^n przyporządkowany stanowi wewnętrznemu q^n_r. Na przykład dla dendrytu z ryc. 30 mamy

$$Z^2 = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_6\}$$

W zbiorze tym elementy z_1, z_2, z_4 warunkują przejście automatu stopnia $n = 2$ w stan q^2_1, co oznaczymy symbolicznie

$$\{z_1, z_2, z_4\} \Rightarrow q^2_1$$

Podobnie dla pozostałych elementów zbioru Z^2 mamy: $\{z_6\} \Rightarrow q^2_2$, $\{z_3\} \Rightarrow q^2_3$. W celu zapewnienia właściwego działania automatu wielostopniowego, w skład każdego takiego podzbioru może wejść co najwyżej tyle elementów $z_j \in Z^n$, ile jest zbiorów S^n_i w piętrze n jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry (zbiór S^n_i zdefiniowany został w rozdziale 3 — wyrażenia 3.5 i 3.6). Dodatkowym warunkiem jest to, że z każdego zbioru S^n_j może wejść do danego podzbioru $\{z_{j_1}, z_{j_2}, ...,\} \Rightarrow q^n_r$ nie więcej niż jeden element $z_j \in S^n_j$.

Stąd też w celu jednoznacznego określenia stanów wewnętrznych automatu stopnia n należy każdemu elementowi z_j danego zbioru S^n_j przyporządkować inny stan wewnętrzny $q^n_r \in Q_n$. Dla dendrytu gry z ryc. 30 warunek ten jest spełniony, co łatwo jest sprawdzić, analizując drugie piętro dendrytu.

W procesie realizacji gry przez automat rozgrywający automaty jednostopniowe poszczególnych stopni pracują w kolejności określonej numerem porządkowym stopnia n. Zgodnie z tym, w posunięciu $n = 1$ przechodzi w odpowiedni stan roboczy

automat stopnia $n = 1$, w posunięciu $n = 2$ automat stopnia $n = 2$ itd.

Aktualne w danym momencie czasu stany wewnętrzne automatów poszczególnych stopni określają jednoznacznie stan wewnętrzny automatu wielostopniowego (rozgrywającego). Stan wewnętrzny automatu wielostopniowego po danym posunięciu n jest więc funkcją stanów wewnętrznych automatów poszczególnych stopni do stopnia n włącznie. Oznaczając symbolem $F(n)$ stan wewnętrzny automatu wielostopniowego po posunięciu n, a symbolem $q(k)$ stan wewnętrzny automatu jednostopniowego o stopniu k, funkcję tę możemy wyrazić następująco

$$F(n) = f[q(1), q(2), ..., q(k), ..., q(n)] \quad (5.11)$$

Stan $F(n)$ jednoznacznie określa sygnał $y(n)$ pojawiający się na wyjściu automatu wielostopniowego po posunięciu n. Sygnał $y(n)$ przyjmuje więc swoje wartości ze zbioru Y zgodnie z następującą funkcją

$$y(n) = \varphi[F(n)] \quad (5.12)$$

Obie podane wyżej funkcje noszą odpowiednio nazwy funkcji przejść i funkcji wyjść automatu wielostopniowego. Funkcje te swoją postacią różnią się tym od funkcji zadanych wyrażeniami (5.8) i (5.9), że uwzględniają wielostopniową strukturę automatu rozgrywającego, odpowiadającą strukturze jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Zgodnie z funkcją przejść każdy stan wewnętrzny automatu wielostopniowego przyporządkowany jest tylko jednemu wierzchołkowi typu B_r^n jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Na przykład dla dendrytu gry przedstawionego na ryc. 30 wierzchołek B_1^2 reprezentuje stan wewnętrzny

$F_1^2 = q_1^1\ q_1^2$, wierzchołek B_2^2 — stan $F_2^2 = q_1^1\ q_2^2$, wierzchołek B_7^2 — stan $F_7^2 = q_3^1\ q_3^2$ itd. Stan wewnętrzny automatu wielostopniowego po posunięciu $n = 2$ reprezentowany jest więc dwuelementowym ciągiem, w którym pierwszym elementem jest aktualny stan wewnętrzny automatu stopnia $n = 1$, a drugim — aktualny stan wewnętrzny automatu stopnia $n = 2$.

Analogicznie stan wewnętrzny automatu wielostopniowego dla większej wartości n można wyrazić ciągiem

$$F_j^n = q_{r_1}^1\ q_{r_2}^2 \ldots ,\ q_{r_n}^n \tag{5.13}$$

W automacie rozgrywającym o strukturze wielostopniowej, podobnie jak w dowolnie innym automacie z pamięcią, wyróżnia się dwie podstawowe części funkcjonalne, tj. część pamięciową i część kombinacyjną. Część pamięciową tworzą elementy pamięciowe automatów poszczególnych stopni, a część kombinacyjną tworzą elementy logiczne bądź to podporządkowane automatom poszczególnych stopni, bądź to wspólne dla wszystkich automatów jednostopniowych.

Część kombinacyjna automatu rozgrywającego jest rozbudowanym układem logicznym realizującym odpowiednie funkcje przełączające (boolowskie). W automacie rozgrywającym o strukturze wielostopniowej możemy wyróżnić dwa rodzaje funkcji przełączających, opisujących układ logiczny automatu. Są to funkcje przełączające wejść automatów poszczególnych stopni oraz funkcje wyjść automatu wielostopniowego. Każdy automat jednostopniowy wchodzący w skład automatu wielostopniowego posiada tyle funkcji przełączających wejść, ile wynosi liczba jego stanów wewnętrznych. Dowolna funkcja

przełączająca wejść automatu jednostopniowego danego stopnia n opisuje układ logiczny realizujący przejście automatu jednostopniowego ze stanu zerowego q_0^n do jednego, ściśle określonego stanu roboczego $q_r^n \in Q_n$.
Funkcja taka ma postać

$$\begin{aligned} &\Psi_j^n[\check{n}_n, J_j^n(z_{j_1}, z_{j_2}, ...,)] = \\ &= \check{n}_n \cdot (z_{j_1} \vee z_{j_2} \vee ...) \Rightarrow q_r^n \end{aligned} \tag{5.14}$$

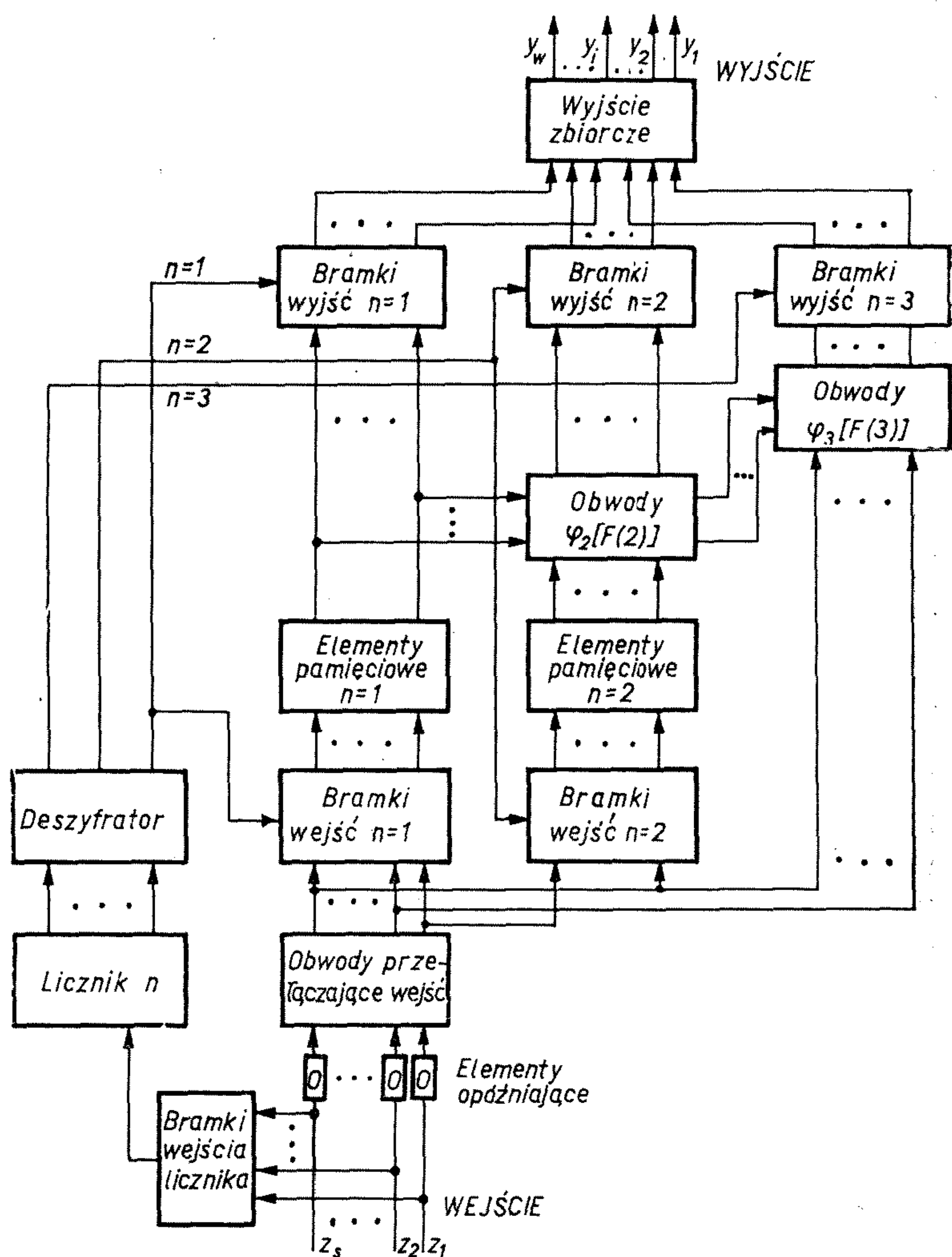
W wyrażeniu tym symbol $\check{n}_n$ jest zmienną boolowską reprezentującą sygnał wystąpienia w grze posunięcia n. Zmienna $\check{n}_n$ przyjmuje wartość $\check{n}_n = 1$, gdy posunięcie n wystąpiło, i wartość $\check{n}_n = 0$, gdy posunięcie n nie wystąpiło. Natomiast symbole $z_{j_1}, z_{j_2}, ...$ oznaczają ściśle określane sygnały wejściowe automatu wielostopniowego, przynależne do zbioru $Z^n \subset Z$. Sygnał jedynkowy pojawiający się na wyjściu układu logicznego, opisanego wyrażeniem (5.14), powoduje przejście w stan 1 tylko przerzutnika $\langle q_r^n \rangle$, który będąc w stanie 1 sygnalizuje stan q_r^n — stąd też dla oznaczenia takiego przyporządkowania zastosowano w wyrażeniu symbol $\Rightarrow$.

Drugim rodzajem funkcji przełączających opisujących strukturę logiczną automatu wielostopniowego są funkcje przełączające wyjść. Wyjścia automatu wielostopniowego opisane są elementami y_l zbioru Y zawierającego strategie chodowe gracza A. Sygnał pojawiający się na danym wyjściu opisanym symbolem y_l jest sygnałem wyjściowym y_l, który reprezentuje ściśle określoną strategię chodową gracza A. Sygnał wyjściowy y_l, zgodnie z wyrażeniem $y(n) = \varphi[F(n)]$, jest zależny od stanu wewnętrznego automatu wielostopniowego. W zbiorze możliwych stanów wewnętrznych automatu wielostopniowego możemy wybrać te stany, z których każdy warunkuje

sobą jeden i ten sam sygnał wyjściowy y_i. Z kolei każdy stan wewnętrzny automatu wielostopniowego, zgodnie z wyrażeniem (5.13), możemy potraktować jako iloczyn logiczny wyróżnionych stanów wewnętrznych automatów poszczególnych stopni. Stąd też dla każdego $y_i \in Y$ można określić odpowiednie wyrażenia boolowskie reprezentujące funkcję przełączającą typu $y_i = \varphi_i[F(n)]$, tj. przyporządkowaną danemu wyjściu y_i. Funkcja taka opisuje sobą układ logiczny doprowadzający sygnał z wyjść jedynkowych określonych elementów pamięciowych na wyjście y_i automatu wielostopniowego.

Dla uzyskania pewnego wglądu w strukturę automatu rozgrywającego, na ryc. 31 przedstawiono schemat funkcjonalny tego automatu dla gry kończącej się po trzech posunięciach (tj. dla $n_{max} = m = 3$). Elementem sterującym pracą automatu rozgrywającego jest licznik kolejnych posunięć w grze, oznaczony na schemacie jako „licznik *n*". Licznik *n* jest licznikiem binarnym, tzn. wynik liczenia pamiętany jest w liczniku w postaci liczby dwójkowej, reprezentowanej odpowiednią kombinacją zero-jedynkową. Stan licznika *n* określa numer kolejnego posunięcia w grze. W momencie wykonania przez gracza *B* kolejnego ruchu, rozpoczynającego nowe posunięcia w grze, na jednym z wejść „z_j" automatu pojawia się dodatni impuls napięcia odpowiadający sygnałowi 1. Sygnał ten poprzez bramki wejściowe licznika trafia na jego wejście zliczające.

Stan licznika powiększa się o jeden i wskazuje aktualny numer porządkowy posunięcia w grze. Zmieniony stan licznika powoduje pojawienie się sygnału jedynkowego na ściśle określonym i tylko jednym wyjściu deszyfratora licznika, a mianowicie na takim wyjściu deszyfratora, którego numer porządkowy odpowiada aktualnemu stanowi licznika.



Ryc. 31

Sygnał ten, reprezentujący aktualną
otwiera odpowiednie bramki znajdując
dach wejściowych i wyjściowych ar
wającego. Jednocześnie sygnał z_j c

automatu podawany jest, poprzez przyporządkowany sobie obwód wejściowy i otwartą sygnałem „n" bramkę, na jeden z przerzutników automatu stopnia n i powoduje jego przejście w stan 1. W wyniku tego następuje zmiana stanu wewnętrznego automatu wielostopniowego, pociągająca za sobą pojawienie się na jego wyjściu określonego sygnału $y_i \in Y$.

W automacie jednostopniowym ostatniego stopnia, w rozpatrywanym przypadku dla $n = 3$, z reguły nie znajdują się elementy pamięciowe. Dla ostatniego posunięcia w grze stan automatu wielostopniowego określany jest przez sygnał z_j w tym posunięciu i przez wyróżniane stany automatów jednostopniowych wszystkich niższych stopni (tj. stopni $n = 1$, $n = 2$).

W przedstawionej charakterystyce automatu rozgrywającego nie uwzględniono zagadnienia minimalizacji struktury automatu. W wyniku zastosowania takiej minimalizacji, niektóre elementy pamięciowe stają się wspólne dla automatów jednostopniowych kilku stopni, co w pewnym sensie zniekształca dendrytową strukturę automatu rozgrywającego.

6

Gra w szachy w świetle cybernetyki

Szachy — problem cybernetyczny

Najbardziej udanym modelem odniesienia dla wielu problemów, dających się opisać postacią dwuosobowej gry wielochodowej i rozpatrywanych w cybernetyce z punktu widzenia procesów sterowania, jest niewątpliwie gra w szachy. Znaczenie tej gry jako pewnego modelu odniesienia uzasadnione jest m.in. pozycją, jaką gra ta zajmuje w teorii gier.

Teoria gier, poświęcona formalnemu ujęciu sytuacji konfliktowych, wyrosła na gruncie istniejących gier towarzyskich, wśród których gra w szachy ze względu na swą złożoność zajmowała i nadal zajmuje szczególną pozycję, chociażby dlatego, że do tej pory gra ta nie została rozwiązana. Szereg problemów sterowania, rozpatrywanych w cybernetyce i wykazujących cechy sytuacji konfliktowych, kojarzy się swą złożonością z grą w szachy. Stąd też grę w szachy można potraktować jako uogólniony model pewnego procesu fizycznego, dającego się opisać postacią dwuosobowej gry wielochodowej. Rozpatrywanie problemu automatycznego sterowania tym procesem, z punktu widzenia interesów jednego z graczy, pozwala na wyciągnięcie wniosków, dotyczących wykorzystania automatów rozgrywających do optymalnego sterowania działaniem systemów z zacho-

waniem celowym. Ponadto należy zwrócić uwagę na to, że gra w szachy jest jedną z najbardziej skomplikowanych gier, jakie wynalazła ludzkość, a tym samym jest odzwierciedleniem zdolności umysłu ludzkiego, i że ze względu na swą złożoność i stopień skomplikowania gra ta znajduje się w sferze zagadnień rozpatrywanych w cybernetyce.

Ponieważ w aspekcie historycznym rozwój cybernetyki jako nauki pokrywa się z rozwojem elektronicznych maszyn cyfrowych jako urządzeń genezy zainteresowania się tym problemem należy szukać w pracach związanych z analizą możliwości obliczeniowych maszyn cyfrowych.

Od czasu uruchomienia pierwszych elektronicznych maszyn cyfrowych naukowców po prostu fascynowało pytanie, czy maszyna cyfrowa jest zdolna grać w szachy i w jakim stopniu. Jak wiadomo, maszyna cyfrowa działa według ściśle określonego programu wprowadzonego do jej pamięci, dlatego też, aby mogła ona grać w szachy, należy ją odpowiednio zaprogramować. Z drugiej strony wiadomo jednak, że zgodnie z obliczeniami Claude Shannona istnieje aż 10^{120} możliwych wariantów rozegrania gry w szachy. Jakkolwiek więc ułożenie programu optymalnego postępowania maszyny cyfrowej w procesie realizacji gry w szachy jest możliwe, jednak jego realizacja — przy istnieniu tak olbrzymiej liczby wariantów rozegrania gry w szachy — jest niemożliwa dla współczesnych maszyn cyfrowych. Wynika to z tego, że przed wykonaniem dowolnego ruchu maszyna cyfrowa musiałaby przeanalizować wszystkie możliwe dalsze ruchy, konsekwencje tych ruchów oraz uwarunkowane nimi konfiguracje figur na szachownicy.

Przy ograniczonej szybkości działania współczesnych maszyn cyfrowych, która maksymalnie

wynosi około $12 \cdot 10^6$ operacji na sekundę, proces tej analizy trwałby bardzo długo, a w niektórych przypadkach nawet kilka lat. Stąd też do dzisiejszego dnia nie ma maszyn cyfrowych grających w szachy w sposób optymalny, tzn. w taki sposób, który zapewniałby maszynie cyfrowej uzyskanie pewnej wygranej przy prowadzeniu gry z dowolnym rozumnym przeciwnikiem lub, w najgorszym dla niej przypadku, osiągnięcie remisu. Pojawiające się od czasu do czasu w różnych czasopismach wzmianki o komputerach grających w szachy dotyczą maszyn cyfrowych, grających w szachy według metod heurystycznych. Metody heurystyczne oparte są na przyjmowaniu pewnych prawdopodobnych hipotez o słuszności wykonywanych ruchów. Przy prowadzeniu gry w szachy według metod heurystycznych istnieje zawsze prawdopodobieństwo, że maszyna cyfrowa może przegrać nawet z początkującym szachistą.

Historia układania programów szachowych dla maszyn cyfrowych i praktycznego wykorzystania — na podstawie tych programów — maszyn cyfrowych do prowadzenia gry w szachy, w układzie człowiek—komputer bądź też w układzie komputer—komputer, jest już dość bogata w fakty. Historia ta rozpoczyna się od artykułu Claude Shannona, opublikowanego w 1949 r. i dotyczącego zagadnienia programu szachowego. Jednak w artykule tym Shannon nie przedstawił konkretnego programu, lecz omówił tylko szereg podstawowych zasad dotyczących układania takiego programu. Koncepcje Shannona sprowadzały się do tego, że w celu ułożenia programu szachowego w procesie prowadzenia gry w szachy należy wyróżnić następujące czynności: rozpatrzenie wszystkich możliwych w danej sytuacji ruchów, analiza tych ruchów, wybór najlepszego ruchu na podstawie otrzymanych ocen.

Według Shannona analizę ruchów figur na szachownicy przeprowadza się w celu otrzymania pewnej efektywnej oceny każdego możliwego ruchu z danej pozycji. Łączy się to z rozpatrzeniem możliwych wariantów rozegrania gry z danej pozycji o kilka posunięć w przód, tj. do pewnej określonej głębokości w rozgrywanej partii. Rozpatrywanie wariantów rozegrania gry z danej pozycji, aż do sytuacji będącej zakończeniem gry, tj. na całą głębokość, jest niemożliwe ze względu na olbrzymią liczbę możliwych wariantów kontynuowania gry z danej pozycji. Stąd też, w trakcie analizy sytuacje znajdujące się na danej głębokości są oceniane na podstawie rozmieszczenia figur na szachownicy.

Wynikiem analizy możliwych ruchów figury z danej pozycji są pewne oceny liczbowe odnoszące się do każdego ruchu figury z tej pozycji — oczywiście ruch z najwyższą oceną jest najlepszy. Należy jednak zauważyć, że w danej sytuacji powstałej na szachownicy analizie podlegają nie tylko ruchy jednej określonej figury, ale wszystkich tych figur, które w danej sytuacji mają możliwość ruchu, a więc nie są blokowane. Na podstawie porównania otrzymanych z analizy ocen ruchów figur nie blokowanych wykonuje się ruch, który ma ocenę najwyższą i dotyczy określonej figury.

Według koncepcji Shannona kryteria oceny ruchów figur, pozycji i konfiguracji figur na szachownicy opierają się na metodach heurystycznych, przy czym do oceny takiej należy wykorzystywać pewne dane statystyczne, zebrane na podstawie analizy partii szachów rozegranych przez najlepszych szachistów świata.

Koncepcje Shannona stały się podstawą większości późniejszych konkretnych programów szachowych. Do bardziej znanych programów szacho-

wych — programów heurystycznych — należy zaliczyć program Turinga (1950), program Bernsteina (1958) oraz program Newella, Shawa i Simona (1958). Układaniem programów szachowych zajmowali się również czołowi szachiści, byli mistrzowie świata, jak Max Euwe (Holandia) i Michał Botwinnik (ZSRR).

Na przykład Botwinnik opracował algorytm gry w szachy do wykorzystania na maszynie cyfrowej, który charakteryzuje się tym, że jest odzwierciedleniem stosowanych przez niego metod prowadzenia gry w szachy. Algorytm ten został opublikowany w 1968 r. w języku rosyjskim i w 1970 r. w języku angielskim. Na podstawie algorytmu Botwinnika opracowany został program szachowy dla maszyny cyfrowej M-220.

Wszystkie wymienione programy szachowe są dalekie od doskonałości, gdyż gra komputerów wykorzystujących te programy przebiega na poziomie przeciętnego szachisty amatora. Do najgłośniejszych meczy szachowych rozegranych przez komputery należy zaliczyć międzynarodowy mecz szachowy, który odbył się w 1967 r. między komputerem amerykańskim i radzieckim. W meczu tym Związek Radziecki reprezentowała maszyna cyfrowa M-20, natomiast Stany Zjednoczone — maszyna IBM 7090.

W rzeczywistości mecz odbywał się nie między komputerami, a między grupami naukowców z obu krajów; był to po prostu bardzo ciekawy eksperyment naukowy mający dać odpowiedź na pytanie, który program szachowy jest lepszy. Program radziecki opracowała grupa pracowników Instytutu Fizyki Teoretycznej i Eksperymentalnej w Moskwie, a program amerykański — grupa pracowników naukowych z Uniwersytetu Stanford; grupą tą kierował wybitny specjalista z zakresu programo-

wania maszyn cyfrowych, John McCarthy. Wynik meczu był niekorzystny dla amerykańskiej grupy naukowców: maszyna amerykańska przegrała w stosunku 1 : 3, pomimo iż była większa od maszyny radzieckiej.

Obydwa programy szachowe były opracowane według koncepcji Shannona, oczywiście odpowiednio zmodyfikowanej, i cechowały się heurystycznym, a więc w dużym stopniu subiektywnym podejściem do problemu rozegrania gry w szachy. Gdyby obydwa wymienione programy szachowe były optymalne, mecz komputerów skończyłby się wynikiem 0 : 0, tj. remisem. Dotychczas jednak brak optymalnych programów szachowych. Opracowanie takich programów łączy się z odejściem od metody heurystycznej i zastąpieniem jej przez pewną metodę zdeterminowaną, nie zawierającą elementów prawdopodobieństwa i subiektywizmu. Odejście od metody heurystycznej w układaniu programów szachowych nie jest jednak takie proste, gdyż łączy się z rozwiązaniem wielu dodatkowych zagadnień, a w szczególności z gruntowną analizą matematyczną gry w szachy. Analiza matematyczna gry w szachy jest zagadnieniem niezmiernie ciekawym i bardzo istotnym w poszukiwaniu metody opracowania optymalnego programu szachowego, niestety stanowi do tej pory prawie całkowicie „białą plamę” w problematyce szachowej.

Z powyższych względów problem optymalnego rozgrywania gry w szachy przez automat, którego szczególną postacią jest maszyna cyfrowa, pozostaje w dalszym ciągu otwarty i jest przedmiotem zainteresowania wielu naukowców. Ma on duże znaczenie poznawcze, gdyż rzutuje na możliwość wykorzystania automatów rozgrywających w układach cybernetycznych, służących do sterowania

szczególnie złożonymi procesami fizycznymi dającymi się opisać modelem matematycznym gry.

Krótka charakterystyka złożoności omawianego problemu cybernetycznego oraz jedna z możliwych do przyjęcia koncepcji jego rozwiązania przedstawiona zostanie poniżej.

Gra w szachy w ujęciu algebry zbiorów

W grze w szachy każdy z graczy dysponuje skończonym zbiorem możliwych do wykonania strategii chodowych. W skład każdego takiego zbioru wchodzą 6194 elementy, przedstawione w postaci symboli wyrażających odpowiedni ruch figur na szachownicy. Ruch figury jest strategią chodową i nie należy go mylić z ruchem w grze, gdyż ruch w grze jest zbiorem wyborów (por. rozdział 1). W grze w szachy zbiór możliwych do wykonania strategii chodowych każdego z graczy można podzielić na szesnaście podzbiorów, z których każdy przyporządkowany jest jednej figurze. Elementem takiego podzbioru jest ruch danej figury z jednego pola na inne, reprezentujący ściśle określoną strategię chodową gracza. Na przykład w podzbiorze przyporządkowanym pionkowi stojącemu w pozycji wyjściowej na polu $a2$ elementem podzbioru jest dowolny ruch tego pionka, który może być wykonany w procesie prowadzenia gry. Ruch tego pionka z pola $a2$ na pole $a3$ opisany jest symbolem $a2-a3$ i wyraża jedną ze strategii chodowych gracza B dysponującego figurami białymi. Zapis notacji pełnej możemy uprościć, przyporządkowując mu element z_1. Określając w podobny sposób wszystkie możliwe ruchy białych figur na szachownicy i kodując każdy z tych ruchów symbolem z_j, gdzie j

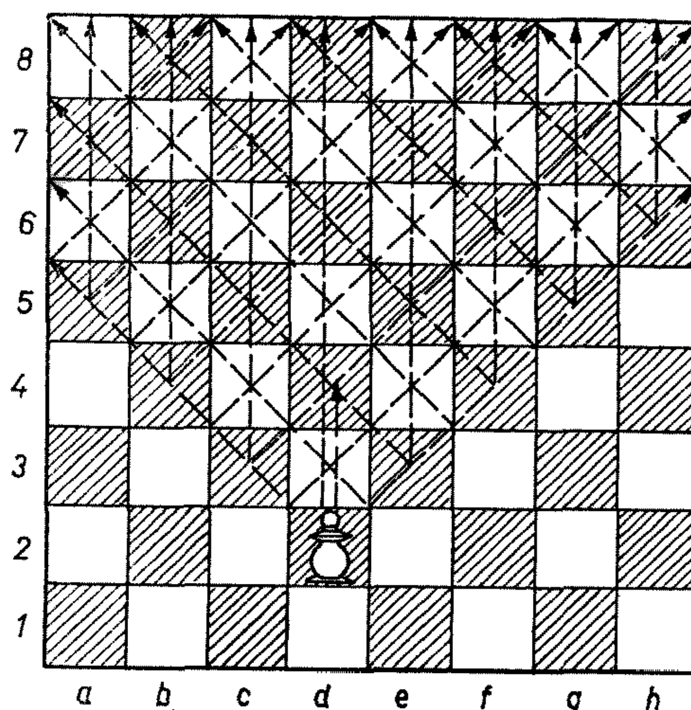
— liczba naturalna przyjmująca wartości od 1 do 6194, zbiór możliwych strategii chodowych gracza *B* przedstawiać się będzie następująco

$$Z = \{z_1, z_2, ..., z_j, ..., z_{6194}\}$$

Natomiast dla gracza *A*, dysponującego figurami czarnymi, zbiór możliwych jego strategii chodowych przedstawić można następująco

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_{6194}\}$$

Z liczby 6194 elementów zbioru *Z* lub zbioru *Y*, 620 elementów przypada na ruchy pionków, 1792 — na wieże, 896 — na gońce, 672 — na skoczki, 1792 — na hetmana, 422 — na króla.



Ryc. 32

Dla ilustracji, na ryc. 32 przedstawiono sposób określenia liczby wszystkich możliwych ruchów pionka stojącego w pozycji wyjściowej na polu *d*2. Wykazane na rysunku linie przerywane są grani-

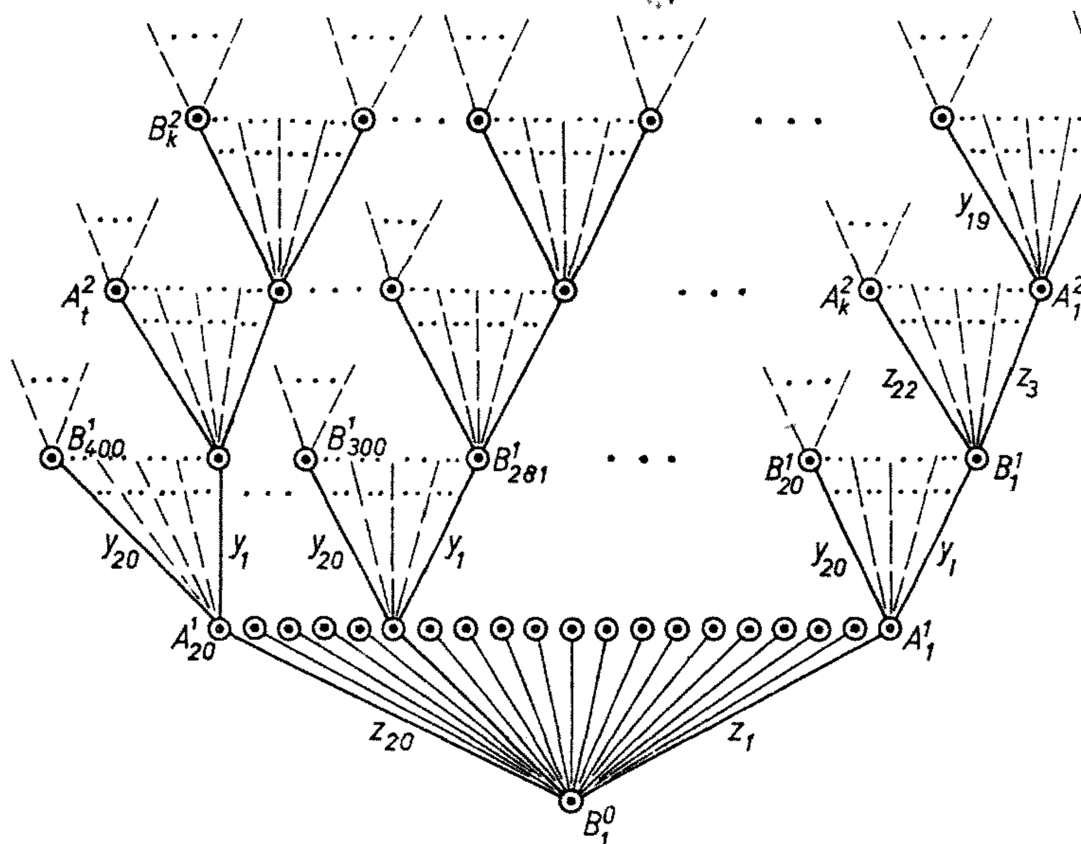
cami obszaru możliwego działania tego pionka, natomiast liczba możliwych jego ruchów wynosi 92. Oczywiste jest, że w procesie realizacji gry, w momencie zdecydowania się na ruch pionkiem gracz dokonuje wyboru ruchu nie w zbiorze 92 elementów, lecz w pewnym podzbiorze ruchów dopuszczalnych, określonych aktualnym położeniem pionka. Stąd też w odniesieniu do wszystkich figur, w każdej sytuacji powstałej na szachownicy gracz dokonuje wyboru kolejnego ruchu nie ze zbioru ruchów możliwych, lecz ze zbioru ruchów dopuszczalnych, przyporządkowanego aktualnej sytuacji powstałej na szachownicy i zawierającego dopuszczalne do wykonania w tej sytuacji strategie chodowe gracza. W grze w szachy można wyróżnić tyle zbiorów ruchów dopuszczalnych, ile jest możliwych sytuacji, które mogą wystąpić na szachownicy w procesie realizacji gry. Dowolny zbiór ruchów dopuszczalnych jest zawsze częścią składową zbioru ruchów możliwych i zawiera nieznaczną ilość elementów tego zbioru.

Szachy — gra z naturą

Zgodnie z teorią gier, grę w szachy zalicza się do klasy gier wielochodowych z pełną informacją. Postacią graficzną tych gier jest dendryt gry.

Gra w szachy ma również swój dendryt gry, jednak dendryt ten jest prawie astronomicznych rozmiarów i jego narysowanie jest niemożliwe. Można narysować tylko niektóre fragmenty tego dendrytu, a w szczególności te, które dotyczą sytuacji związanych z obecnością znikomej liczby figur na szachownicy. Możliwa do wyrysowania jest również początkowa część dendrytu gry w szachy, której

fragment został przedstawiony na ryc. 33. Zgo
z tym rysunkiem, w momencie rozpoczęcia
a więc w pierwszym posunięciu, zbiór dopusz
nych do wykonania strategii chodowych każ



Ryc. 33

z graczy składa się tylko z dwudziestu element
Z wierzchołka początkowego dendrytu wych
dwadzieścia krawędzi opisanych elementami oc
do z_{20}, które oznaczają odpowiednie strategie
dowe gracza B. Gdy gracz B wykona którąś z
puszczalnych dla siebie strategii chodowych,
znajdzie się w jednym z dwudziestu wierzchoł
typu A_k^1 pierwszego piętra dendrytu. Wierzchołek
sygnalizuje, że ruch ma wykonać gracz A. Ponie
w pierwszym posunięciu gracz A ma prawo wyko
też tylko jedną strategię chodową z dwudzi
dopuszczalnych, to po wykonaniu przez niego ru
sytuacja powstała w grze określona będzie jedn

z 400 wierzchołków typu B_k^1, znajdujących s
poziomie zamykającym pierwsze piętro den
Liczba krawędzi wychodzących z dowolnego z
wierzchołków może być już większa od dwudz
stąd też liczba wierzchołków A_k^2 w drugim p
dendrytu jest większa od 8000. Z przedstawi
fragmentu wynika, że wraz ze wzrostem liczb
sunięć następuje zwiększenie rozmiarów den

Pomimo iż dendrytu gry w szachy nie r
narysować, to jednak znając strukturę tego der
można na niej oprzeć dokładną analizę gry w sz

Jak wiadomo, rozwiązanie dowolnej gry
osobowej sprowadza się do znalezienia optyma
strategii pełnych obu graczy oraz wartości w
końcowego gry, który jest jednoznacznie okre
przez te strategie. Jakiekolwiek odstępstwo d
gracza od przyporządkowanej mu strategii optym
jest zawsze przyczyną niekorzystnego dla
wyniku końcowego gry, przy spełnieniu war
że jego przeciwnik nie odstępuje od swojej str
optymalnej. Gra w szachy ma również swoje
wiązanie, lecz znalezienie tego rozwiązania
obecnie niemożliwe, nawet przy wykorzystaniu
bardziej nowoczesnych maszyn cyfrowych.
czyną tego, jak mówiliśmy, jest olbrzymia
możliwych strategii pełnych będących w dyspo
każdego z graczy, jak również ograniczona szy
wykonywania operacji przez maszynę cyf

Z faktu, że gra w szachy jest tymczasem n
wiązalna, można wyciągnąć korzystny wniosek
tyczący analizy tej gry. Mianowicie, jeżeli grac
zna swojej optymalnej strategii pełnej w grze w
chodowej, to wówczas wykonywane przez
strategie chodowe są obarczone większym lub m
szym błędem. W takiej sytuacji, realizując dow
strategię chodową, dany gracz opiera się wyłą

na nabytym doświadczeniu i na regułach gry, ale w konsekwencji dokonywanego przez siebie wyboru nie jest pewny, czy przyjęta przez niego strategia chodowa zapewni mu wygraną. Z istnienia więc w grze w szachy pewnego czynnika losowego wynika, że jedną ze stron dogodnie jest potraktować jako naturę, która wybierając swoje strategie chodowe sposobem losowym popełnia błędy wykorzystywane przez stronę przeciwną do maksymalizowania wygranej.

Załóżmy teraz, że interesuje nas rozegranie partii gry w szachy z punktu widzenia gracza *A* dysponującego figurami czarnymi. Z przyczyn podanych wyżej posiadanie informacji przez stronę *A* o swej optymalnej strategii pełnej w grze staje się zbędne, gdyż wykorzystując błędy popełniane przez stronę *B*, strona *A* też z konieczności jest zmuszona do odstępstwa od swojej optymalnej strategii pełnej w celu zmaksymalizowania swojej wygranej. Maksymalizacja wygranej w grze w szachy sprowadza się do uzyskania wygranej przez gracza *A* przy mniejszej liczbie ruchów niż liczba ruchów wynikająca ze strategii optymalnej. Aby uzyskać możliwość maksymalizowania swej wygranej kosztem błędów popełnianych przez stronę przeciwną, strona *A* zmuszona jest do opracowania odpowiedniego algorytmu postępowania. Opracowanie tego algorytmu sprowadza się do przeprowadzenia jednostronnej optymalizacji dendrytu gry w szachy za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej.

Jednostronna optymalizacja dendrytu gry w szachy

Celem jednostronnej optymalizacji dendrytu gry w szachy jest wyeliminowanie z dendrytu niekorzystnych dla gracza *A* strategii chodowych,

co równoznaczne jest z wykreśleniem odpowiednich krawędzi dendrytu, a więc wraz z optymalizacją dendrytu następuje jego redukcja. Cechą charakterystyczną jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry jest to, że z każdego wierzchołka typu A_k^n wychodzi tylko jedna krawędź. Stąd też przy realizacji gry według jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry, gracz *A* w dowolnej sytuacji nie dokonuje wyboru strategii chodowej w zbiorze dopuszczalnych strategii chodowych odpowiadających tej sytuacji, gdyż dysponuje już tylko jedną, ściśle określoną optymalną strategią chodową. Zoptymalizowany dendryt gry odzwierciedla optymalne postępowanie gracza *A* w funkcji stosowanych przez gracza *B* strategii chodowych. Oczywiste jest, że przy grze w szachy pamiętanie przez gracza *A* wszystkich optymalnych strategii chodowych w funkcji wszystkich ruchów poprzednich, swoich i swego przeciwnika, jest niemożliwe. Gracza *A* można jednak zastąpić automatem, który potrafi zapamiętać strukturę jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry i będzie prowadził grę na korzyść gracza *A*. Problem jednostronnej optymalizacji dendrytu gry w szachy jest bardzo złożony ze względu na olbrzymią liczbę możliwych wariantów rozegrania partii gry. Algorytm jednostronnej optymalizacji dendrytu gry w szachy zawiera 146 złożonych operacji, z których każda składa się z odpowiedniej liczby operacji elementarnych realizowanych przez maszynę cyfrową.

Opracowany na podstawie tego algorytmu program powinien być wprowadzony do pamięci maszyny cyfrowej. Przedstawienie omawianego algorytmu, a tym samym programu, wykracza poza ramy niniejszej książki, w związku z czym ograniczymy się tutaj tylko do pewnych uwag ogólnych.

Danymi do optymalizacji dendrytu gry w szachy przy pomocy maszyny cyfrowej są: zbiory Z i Y, pole robocze gry i elementy ruchów strony A i B. Polem roboczym gry jest model szachownicy zapamiętany w 64 komórkach pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej, z których każda odpowiada jednemu polu szachownicy, natomiast elementami ruchów są poszczególne figury. Zawartość zerowa którejś z wymienionych 64 komórek oznacza, że dane pole szachownicy nie jest zajęte, natomiast zawartość różna od zera wskazuje na aktualny element ruchu znajdujący się na tym polu. Na polu roboczym gry maszyna cyfrowa rozgrywa fikcyjne partie gry, które poddaje z kolei analizie celem wyeliminowania niekorzystnych strategii chodowych gracza A. Wyniki optymalizacji zapamiętane są w pamięci pomocniczej, wykonanej na taśmach magnetycznych.

Optymalizacja dendrytu gry w szachy nie jest związana z koniecznością rozpatrywania całego dendrytu, lecz tylko z analizą pewnych jego fragmentów. Niektóre części składowe dendrytu w ogóle nie podlegają analizie, a mianowicie te, które są zbudowane na krawędziach określonych w procesie analizy jako niekorzystne dla gracza A.

Wynikiem jednostronnej optymalizacji dendrytu gry w szachy są elementy zbiorów Y i Z opisujące krawędzie jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Ze względu na rozmiary dendrytu gry w szachy oraz ograniczoną pojemność pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej optymalizacja tego dendrytu może być realizowana tylko częściami. Częścią składową kompletnego dendrytu gry w szachy nazywamy dendryt zbudowany na jednej krawędzi wychodzącej z danego wierzchołka B_k^{n-1}. Na przykład dla pierwszego wierzchołka dendrytu B_1^0

mamy dwadzieścia części składowych dendrytu oznaczonych symbolami C^0_1, C^0_2, ..., C^0_{20}. Dokonując podziału kompletnego dendrytu gry w szachy na części składowe na wysokości pierwszego piętra dendrytu, tj. opierając się na krawędziach wychodzących z wierzchołków B^1_1, B^1_2, B^1_3, ..., B^1_{400} uzyskalibyśmy części składowe C^1_1, C^1_2, ..., C^1_w, gdzie $w > 400$. Wyniki optymalizacji danej części składowej dendrytu są wyprowadzane każdorazowo do pamięci na taśmach magnetycznych. Pamięć operacyjna maszyny cyfrowej zostaje częściowo opróżniona i maszyna przystępuje do budowy następnej z kolei części składowej dendrytu z jednoczesnym przeprowadzeniem jej optymalizacji. Chociaż w procesie optymalizacji niektóre fragmenty danej optymalizowanej części składowej C^n_j nie podlegają analizie, to jednak proces jednostronnej optymalizacji trwałby bardzo długo z powodu ograniczonej szybkości działania maszyny cyfrowej. Z uwagi na olbrzymią liczbę sytuacji, które należy przeanalizować w procesie optymalizacji dendrytu gry, szybkość liczenia współczesnych maszyn cyfrowych jest jeszcze zbyt mała.

W celu zmniejszenia czasu potrzebnego do optymalizacji dendrytu gry w szachy, liczbę części składowych dendrytu przeznaczonych do optymalizacji należy zredukować. Jest więc rzeczą słuszną podzielić je na pary, charakteryzujące się względem siebie pewnym podobieństwem. Taką parę części składowych dendrytu gry w szachy stanowią np. dendryt zbudowany na krawędzi wychodzącej z wierzchołka B^0_1, która jest opisana elementem z_1 oznaczającym ruch pionka gracza B z pozycji *a*2 na *a*3, oraz dendryt zbudowany na krawędzi wychodzącej z tego samego wierzchołka, lecz opisanej elementem z_{15} oznaczającym ruch pionka z pozycji *h*2 na *h*3.

Oznaczamy odpowiednio oba wymienione dendryty symbolami C_1^0 i C_{15}^0. Znając zoptymalizowaną postać dendrytu C_1^0 zbudowanego na krawędzi z_1 wychodzącej z wierzchołka B_1^0 można określić zoptymalizowaną postać dendrytu C_{15}^0 drogą zmiany elementów z_j i y_i opisujących krawędzie dendrytu C_1^0. W tym też celu należy określić odpowiadające sobie elementy zbiorów Z i Y, które występują w opisie obu części C_1^0 i C_{15}^0. Proces ten polega na przeprowadzeniu analizy przy pomocy maszyny cyfrowej, w której wyniku otrzymujemy ustalenie, że np. element z_{32} występujący w opisie dendrytu C_1^0 odpowiada elementowi z_{80} dendrytu C_{15}^0, itd. Analiza taka może być przeprowadzona przez maszynę cyfrową w czasie wielokroć krótszym od czasu jednostronnej optymalizacji dendrytu C_{15}^0.

Redukując do minimum liczbę tych części składowych kompletnego dendrytu gry w szachy, które podlegają jednostronnej optymalizacji, całą operację związaną z optymalizacją można przeprowadzić w realnym z praktycznego punktu widzenia czasie.

Jednostronna optymalizacja dendrytu gry w szachy przy pomocy maszyny cyfrowej jest niczym innym, jak przyspieszonym procesem uczenia się przez automat gry w szachy. Każde podejście do zagadnienia rozwiązania automatycznego rozgrywania gry w szachy kończy się wnioskiem, że automat tego typu powinien być automatem uczącym się. Pojęcie automatów uczących się jest szeroko rozpatrywane w cybernetyce. Gdyby udało się zbudować automat uczący się grać w szachy, to proces uczenia się takiego automatu trwałby bardzo długo. Stąd też wydaje się celowe przyspieszyć ten proces przy pomocy elektronicznej maszyny cyfrowej, drogą jednostronnej optymalizacji dendrytu gry.

Gra w szachy w teorii automatów skończonych

Z punktu widzenia matematyki, najważniejszym zagadnieniem przy rozpatrywaniu gry w szachy jest niewątpliwie znalezienie wyrażenia analitycznego opisującego optymalny sposób prowadzenia gry przez danego gracza, np. przez gracza *A*. Takie wyrażenie można określić znając jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry.

W jednostronnie zoptymalizowanym dendrycie gry w szachy dany wierzchołek typu B_k^n określa jednoznacznie sytuację powstałą na szachownicy po posunięciu *n*.

Jeżeli sytuację powstałą na szachownicy po posunięciu *n*, gdzie $n = 1, 2, ..., m$, oznaczymy w sensie ogólnym symbolem $F(n)$, to zbiór możliwych sytuacji po posunięciu *n* będzie przedstawiał się następująco

$$\{F(n)\} = \{F_1^n, F_2^n, ..., F_j^n, ..., F_{tn}^n\}$$

Każdy element tego zbioru jest nazwą sytuacji i przyporządkowany jest jednemu wierzchołkowi B_k^n jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Przy rozgrywaniu danej partii gry, sytuację powstałą po posunięciu *n* opisuje tylko jeden element zbioru $\{F(n)\}$. W podobny sposób zdefiniowane są również zbiory możliwych sytuacji dla wszystkich wartości wielkości *n*. Na przykład dla $n-1$ przy spełnieniu warunku, że $n > 1$, zbiór możliwych sytuacji przedstawia się następująco

$$\{F(n-1)\} = \{F_1^{n-1}, F_2^{n-1}, ..., F_{t,n-1}^{n-1}\}$$

Zgodnie ze strukturą jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry, w dowolnej sytuacji $F(n-1) = F_r^{n-1}$ przyporządkowanej wierzchołkowi typu B_j^{n-1}, wykonana przez gracza *B* w posunięciu *n*

strategia chodowa $z(n) = z_j$ narzuca graczowi A tylko jedną dopuszczalną dla niego strategię chodową $y(n) = y_i$.

Gracz A nie ma innego wyboru i musi wykonać narzuconą sobie strategię chodową, gdyż grę prowadzi według jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Stąd też wykonana przez gracza B w danej sytuacji $F(n-1) = F_r^{n-1}$ strategia chodowa $z(n) = z_j$ jednocześnie określa nową sytuację $F(n)$, która powstanie na szachownicy po posunięciu n. Wobec powyższego proces prowadzenia gry można opisać następującą parą funkcji

$$F(n) = f[F(n-1), z(n)] \qquad (6.1)$$

$$y(n) = \varphi[F(n)] \qquad (6.2)$$

Funkcje te interpretujemy następująco. Sytuacja $F(n)$ powstała na szachownicy po posunięciu n jest funkcją sytuacji powstałej w posunięciu $n-1$ oraz ruchu $z(n)$ wykonanego przez gracza B w posunięciu n. Podobnie wybór przez gracza A odpowiedniej strategii chodowej w posunięciu n, oznaczony symbolem $y(n)$, jest funkcją sytuacji, jaka powstanie po posunięciu n.

Dokonując przekształcenia wyrażenia (6.2) otrzymamy

$$y(n) = \varphi[F(n)] = [f[F(n-1), z(n)]] \qquad (6.3)$$

Z przedstawionych wyrażeń wynika, że przed dokonaniem ruchu w posunięciu n przez gracza A, na którego korzyść przeprowadzona została jednostronna optymalizacja dendrytu gry, gracz ten powinien znać sytuację $F(n)$, jaka powstanie po posunięciu n.

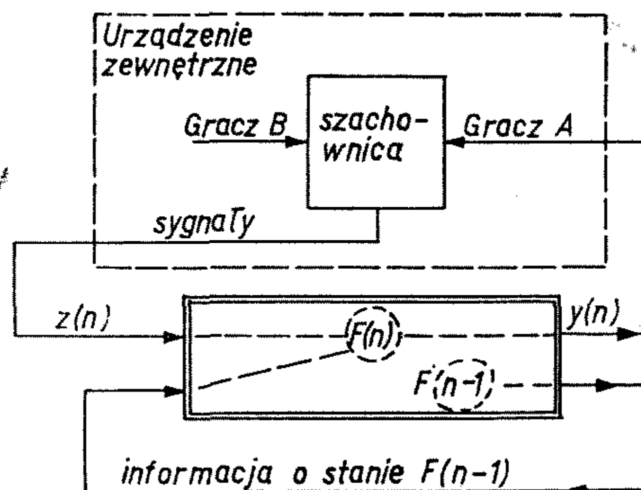
Sformułowanie to jest słuszne, gdyż w posunięciu n gracz B wykonując swój ruch narzuca graczowi A

sytuację $F(n)$, której gracz A nie może zmienić i w związku z tym wykonuje strategię chodową przyporządkowaną tej sytuacji.

Posługiwanie się wyrażeniami (6.1) i (6.2) przez gracza A w procesie realizacji gry w szachy w praktyce jest utrudnione, gdyż wymagałoby to od niego znajomości wszystkich ścieżek jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry lub korzystania ze specjalnego zestawu tablic z danymi, które umożliwiłyby korzystanie z wyrażeń (6.1) i (6.2).

Ze względu na te trudności narzuca się konieczność zastąpienia gracza A automatem, który rozgrywałby grę na jego korzyść i którego działanie zgodne byłoby z funkcją (6.1) i (6.2). Takiego rodzaju automat jest automatem skończonym — rozgrywającym. Każdy stan wewnętrzny automatu rozgrywającego grę w szachy odzwierciedlałby aktualnie powstałą sytuację w procesie prowadzenia gry, która jest reprezentowana jednym z wierzchołków B_k^n jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Zgodnie z postacią wyrażenia (6.1) i (6.2) automat rozgrywający jest układem z pętlą sprzężenia zwrotnego, gdyż do właściwego jego funkcjonowania w posunięciu n na wejście automatu oprócz sygnału wejściowego z_j powinna być doprowadzona informacja o stanie automatu w poprzednim posunięciu $n-1$. Ponieważ stan wewnętrzny automatu po posunięciu $n-1$ — oznaczony symbolem $F(n-1)$ — powinien być pamiętany aż do momentu przejścia automatu w nowy stan $F(n)$, interesujący nas automat jest automatem z pamięcią. Schemat blokowy automatu przedstawiono poglądowo na ryc. 34. Struktura wewnętrzna tego typu automatu została omówiona w rozdziale piątym; przydatna jest ona do praktycznej realizacji takiego automatu, oczywiście przy znajomości jednostronnie zopty-

malizowanego dendrytu gry. Automat rozgrywający, przeznaczony do rozgrywania gry w szachy z rozumnym przeciwnikiem *B*, działałby zgodnie z jednostronnie zoptymalizowanym dendrytem gry. Sygnał



Ryc. 34

wyjściowy wypracowany przez automat reprezentowałby optymalną strategię chodową gracza *A* w danym posunięciu *n*, a tym samym sterowałby automatycznym przesunięciem jednej z czarnych figur na szachownicy, stanowiącej urządzenie zewnętrzne układu (ryc. 34). Realizując grę według jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry, automat z zasady zawsze wygrywałby z rozumnym przeciwnikiem. Przegrana automatu jest całkowicie wykluczona, a prawdopodobieństwo uzyskania remisu jest bardzo znikome.

Przedstawiona wyżej charakterystyka interesującego nas problemu cybernetycznego wskazuje, że istnieje możliwość zbudowania automatu, który rozgrywałby grę w szachy w sposób optymalny z dowolnym przeciwnikiem. Zbudowanie takiego automatu i praktyczne posługiwanie się nim świadczyłoby o tym, że automat zbudowany przez człowieka prze-

wyższa niewspółmiernie ludzkie zdolności rozwiązywania pewnych złożonych problemów. Oczywiste jest, że automat ten nie jest modelem mózgu, gdyż wykonuje tylko pewną ściśle określoną czynność, nie wykonując olbrzymiej liczby pozostałych, stąd też nie można mówić o jego inteligencji. Budowa tego typu automatu stała się możliwa tylko dzięki istnieniu elektronicznych maszyn cyfrowych, które umożliwiają dokonywanie ogromnej ilości przeliczeń celem określenia optymalnego modelu matematycznego rzutującego na strukturę automatu. Chociaż praktyczna korzyść z automatu rozgrywającego grę w szachy jest znikoma, to jednak jego struktura i sposób działania rzutują na całą klasę automatów rozgrywających, które mogą być wykorzystane w układach cybernetycznych do celowego oddziaływania na określone zjawiska fizyczne.

7

Samosterowalność obiektu w przestrzeni w ujęciu gry wielochodowej

Obiekt w przestrzeni a cybernetyka

Datujący się od kilku lat burzliwy rozwój astronautyki byłby niemożliwy bez rozwiązania szeregu problemów z zakresu sterowania obiektami w przestrzeni. W rozwiązywaniu tych problemów niezmiernie ważną, a jednocześnie podstawową rolę odgrywa cybernetyka. Łączy się to ściśle z definicją cybernetyki jako nauki o sterowaniu w sensie ogólnym i związanym z nim przetwarzaniu informacji występującej w procesie sterowania.

Do niewątpliwych osiągnięć cybernetyki w tym zakresie należy zaliczyć sukcesy odniesione przez bezzałogowe statki kosmiczne w badaniu powierzchni Srebrnego Globu. Zrealizowane lądowanie automatu na powierzchni Księżyca i jego powrót na Ziemię, jak również penetracja powierzchni Księżyca przez automat, wskazują na olbrzymią przydatność dalszego rozwoju tej nauki dla potrzeb współczesnej cywilizacji.

Ponieważ z tych potrzeb wypływa m.in. konieczność badania otaczającej nas przestrzeni — a ogólnie przestrzeni kosmicznej — uzasadnione stają się prace zmierzające do zapewnienia szeroko posuniętej samodzielności bezzałogowych obiektów w przestrzeni w podejmowaniu samodzielnych de-

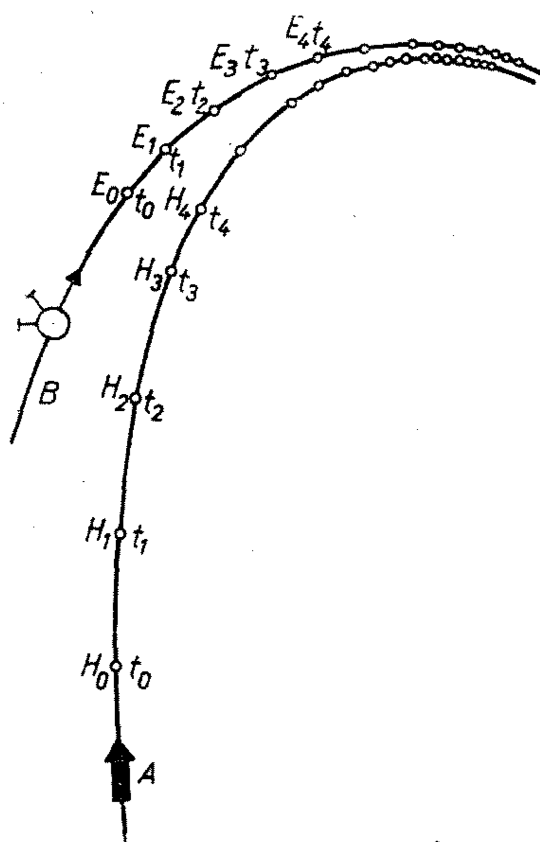
cyzji. Łączy się to z budową automatów przeznaczonych do sterowania działaniem obiektów realizujących w przestrzeni określone z góry zadania. W ogólnym przypadku bezzałogowy obiekt w przestrzeni może być zdalnie sterowany w układzie Ziemia—obiekt lub też może być samodzielnym obiektem cybernetycznym, działającym zgodnie z decyzjami wypracowanymi przez umieszczony w nim automat. Ponieważ zdalne sterowanie obiektem w przestrzeni jest nie zawsze możliwe, problem rozwiązania samosterowalności obiektów nabiera coraz większego znaczenia i jest konsekwencją właściwego kierunku rozwojowego cybernetyki.

Samosterujący bezzałogowy obiekt w przestrzeni, nazywany dalej samodzielnym obiektem cybernetycznym, jest niczym innym, jak robotem w przestrzeni z narzuconym mu programem działania. Program ten może być mniej lub bardziej złożony, w zależności od treści zadania wykonywanego przez obiekt i od liczby możliwych sytuacji wpływających na realizację tego zadania. Program działania obiektu jest zawarty w strukturze automatu skończonego, który, ze względu na pełnioną przez siebie funkcję, jest jak gdyby mózgiem obiektu.

Zasadę samosterowalności obiektu cybernetycznego w przestrzeni najłatwiej będzie wyjaśnić na przykładzie analizy możliwego działania tego obiektu w procesie pościgu i zbliżania się. Wnioski wynikające z takiej analizy, będącej możliwą do przyjęcia koncepcją rozwiązania problemu samosterowalności danego obiektu, można uogólnić na szereg innych procesów i wariantów działania obiektów w przestrzeni. Stąd też dalsza część rozdziału poświęcona będzie szerszemu naświetleniu zagadnienia zapewnienia samosterowalności dla obiektu realizującego proces pościgu w przestrzeni.

Pościg w przestrzeni w ujęciu cybernetycznym

Załóżmy, że w przestrzeni — tak jak to pokazano na ryc. 35 — znajdują się dwa obiekty *A* i *B*, rozmieszczone względem siebie w pewnej odległości i poruszające się z różnymi prędkościami. Obiekt *A* możemy potraktować jako taki bezzałogowy obiekt w przestrzeni, który jest samodzielnym obiektem cybernetycznym o działaniu zdeterminowanym i zgodnym z decyzjami wypracowanymi przez znajdujący się wewnątrz obiektu automat skończony. Natomiast obiekt *B* może być obiektem załogowym, samodzielnym obiektem cybernetycznym lub obiektem natury.



Ryc. 35

Jeśli zadaniem obiektu *A* będzie zbliżenie się do obiektu *B*, a zadaniem dla *B* będzie uniknięcie spotkania z *A*, to wówczas powiemy, że w przestrzeni zachodzi proces pościgu. Pościg ten realizuje obiekt *A*, zaś obiekt *B* jest obiektem ścigania. W przypadku, gdy oby-dwa obiekty *A* i *B* będą dążyć w przestrzeni do wzajemnego zbliżenia się, realizowany przez nich proces nazwiemy procesem zbliżania się. Proces zbliżania się potraktować można jako szczególny przypadek procesu pościgu zachodzący wtedy, gdy obiekt *B* wykonując zadanie ucieczki przed *A* popełnia niedopuszczalne błędy w swoim postępo-

waniu. Stąd też dalej zajmować się będziemy wyłącznie procesem pościgu jako procesem bardziej ogólnym.

Z punktu widzenia matematyki proces pościgu jest grą dwuosobową należącą do klasy gier na przetrwanie. Stąd też rozpatrując proces pościgu w ujęciu teorii gier możemy wyodrębnić dwa możliwe sposoby opisu tego procesu. Mianowicie, proces pościgu można opisać postacią gry wielochodowej typu ciągłego, zwaną często grą różniczkową, lub też postacią gry wielochodowej typu dyskretnego, omówioną w poprzednich rozdziałach. Druga postać gry wielochodowej jest bardziej przydatna do opisu procesu pościgu, gdyż ułatwia nam syntezę, a tym samym budowę automatu skończonego, który umieszczony w obiekcie *A* sterowałby jego działaniem w procesie pościgu. Jak wiadomo, automat skończony jest dyskretnym przetwornikiem informacji, tzn. jest takim urządzeniem, które działa w ściśle określonych momentach czasu. Jego działanie sprowadza się do tego, że sygnał pojawiający się na wejściu zmienia stan wewnętrzny automatu, a ten z kolei warunkuje pojawienie się na wyjściu automatu odpowiedniego sygnału wyjściowego. W rozpatrywanym przypadku sygnałem wejściowym automatu jest informacja o obiekcie *B*, natomiast sygnałem wyjściowym jest wypracowana przez automat decyzja do sterowania obiektem *A*.

Automat skończony umieszczony w obiekcie *A* reprezentuje ten obiekt w dwuosobowej grze wielochodowej opisującej proces pościgu, dlatego też określać go będziemy mianem automatu rozgrywającego. Drugą stroną gry jest obiekt *B*. Automat, jako strona gry, dysponuje zbiorem strategii chodowych

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_w\}$$

natomiast strona *B* gry dysponuje zbiorem strategii chodowych

$$Z = \{z_1, z_2, ..., z_j, ..., z_s\}$$

Dowolny element y_i zbioru Y określa możliwy do przyjęcia i ustalony wcześniej kierunek ruchu obiektu *A* w przestrzeni. W interpretacji automatu rozgrywającego element y_i jest sygnałem wyjściowym automatu, a więc jest pewną decyzją wypracowaną przez automat i dotyczącą działania obiektu *A*. Podobnie dowolny element z_j zbioru Z wyraża kierunek ruchu obiektu *B*, a w interpretacji automatu rozgrywającego jest jego sygnałem wejściowym.

Proces pościgu jest procesem ciągłym, natomiast przyjęty typ gry wielochodowej dotyczy procesu, który zachodzi w dyskretnych chwilach $t_1, t_2, ..., t_i, ...$ Rozbieżności między rzeczywistym przebiegiem procesu pościgu a przebiegiem wynikającym z opisującego go modelu matematycznego będą tym mniejsze, im mniejsze będą odstępy między kolejnymi dyskretnymi chwilami $t_1, t_2, ..., t_i ...$

Przy sterowaniu obiektem *A* z Ziemi dyskretne chwile są momentami, w których jest dokonywana obserwacja obiektu *B*, ustalane jego położenie i działanie oraz, w zależności od wyników obserwacji, pobierana decyzja do sterowania obiektem *A*. Decyzja taka przekazywana jest do obiektu *A* drogą radiową. Ponieważ zgodnie z przyjętym założeniem obiekt *A* jest samodzielnym obiektem cybernetycznym, rolę obserwatora spełnia zamontowane w nim urządzenie radarowe, które w dyskretnych chwilach przekazuje wyniki obserwacji w postaci odpowiednio uformowanych sygnałów na wejście automatu, a ten z kolei wypracowuje decyzje do sterowania obiektem *A*.

Zasadę dyskretyzacji procesu pościgu wyjaśnić można na podstawie analizy sytuacji przedstawionej na ryc. 35. Tak, jak to na tym rysunku pokazano, obiekt A wykonując lot po wybranej trajektorii znalazł się w dyskretnej chwili t_0 w punkcie H_0 przestrzeni. Załóżmy, że w tej samej chwili t_0 urządzenie radarowe obiektu A ustaliło, że w punkcie E_0 znajduje się obiekt B, będący dla A obiektem ścigania. W chwili t_0 obiekt A nie może jeszcze przystąpić do realizacji procesu pościgu, gdyż nie znany mu jest aktualny kierunek przemieszczania się obiektu B, nie zmienia więc on kierunku swego lotu. W następnej dyskretnej chwili t_1 obiekt B znajduje się w punkcie E_1, natomiast obiekt A w punkcie H_1. Znając położenie obiektu B w dwóch następujących po sobie dyskretnych chwilach t_0 i t_1 obiekt A ustala przy pomocy posiadanych urządzeń kierunek przemieszczania się obiektu B. Ustalony w ten sposób kierunek przemieszczania się obiektu B w okresie $T_1 = t_1 - t_0$ jest strategią chodową $z_j \in Z$ obiektu B w dwuosobowej grze wielochodowej. Dla automatu rozgrywającego znajdującego się w obiekcie A rozpoznana strategia z_j jest sygnałem wejściowym automatu. Pod wpływem tego sygnału zmienia się stan wewnętrzny automatu i wypracowana jest, prawie w tej samej chwili t_1, optymalna strategia chodowa y_i dotycząca kierunku lotu obiektu A. W wyniku realizacji strategii y_i w następnej chwili t_2 obiekt A znajdzie się w punkcie H_2.

Jednocześnie w tej samej chwili t_2 na wejściu automatu pojawia się kolejny sygnał $z_r \in Z$ dotyczący strategii chodowej obiektu B wykonanej w czasie $T_2 = t_2 - t_1$. Automat rozgrywający wypracowuje nową strategię chodową y_c, zgodnie z którą jest przeprowadzona korekcja lotu obiektu A. Analogiczny przebieg zachodzi w następnych dys-

kretnych chwilach, przy czym wraz ze zmniejszeniem się odległości między obiektami maleje również okres

$$T_i = t_i - t_{i-1}$$

między kolejnymi dyskretnymi chwilami. Oczywiste jest, że pozytywny wynik pościgu dla obiektu *A* jest możliwy do osiągnięcia tylko wtedy, gdy prędkość obiektu *A* jest większa od prędkości obiektu *B*.

Pościg — gra wielochodowa parametryczna

Z punktu widzenia teorii gier najbardziej uzasadnione jest rozpatrzenie procesu pościgu w ujęciu gry antagonistycznej. Stąd też, przy założeniu, że prędkości obiektów spełniają nierówność $V_A > V_B$, strona *A* będzie dążyła do zminimalizowania czasu przechwytu, natomiast strona *B* do zmaksymalizowania tego czasu. Obiekt *B* zostaje przechwycony, gdy w wyniku realizacji procesu pościgu odległość l między obiektami będzie spełniać warunek $l \leqslant \varepsilon$, gdzie ε — wielkość zadana.

W świetle osiągnięć współczesnej techniki radarowej gra opisująca proces pościgu może być potraktowana jako gra z pełną informacją. W grze wielochodowej z pełną informacją każdy z graczy zna charakter i konsekwencje swoich strategii chodowych i strategii chodowych wykonywanych przez przeciwnika zarówno w danej chwili t, jak również we wszystkich chwilach poprzednich.

W interesującej nas grze konsekwencją strategii chodowych stosowanych przez obie strony gry są zmiany położeń obiektów *A* i *B* w przestrzeni. Aby mieć pełną informację o przebiegu gry, automat rozgrywający powinien otrzymywać od urządzenia

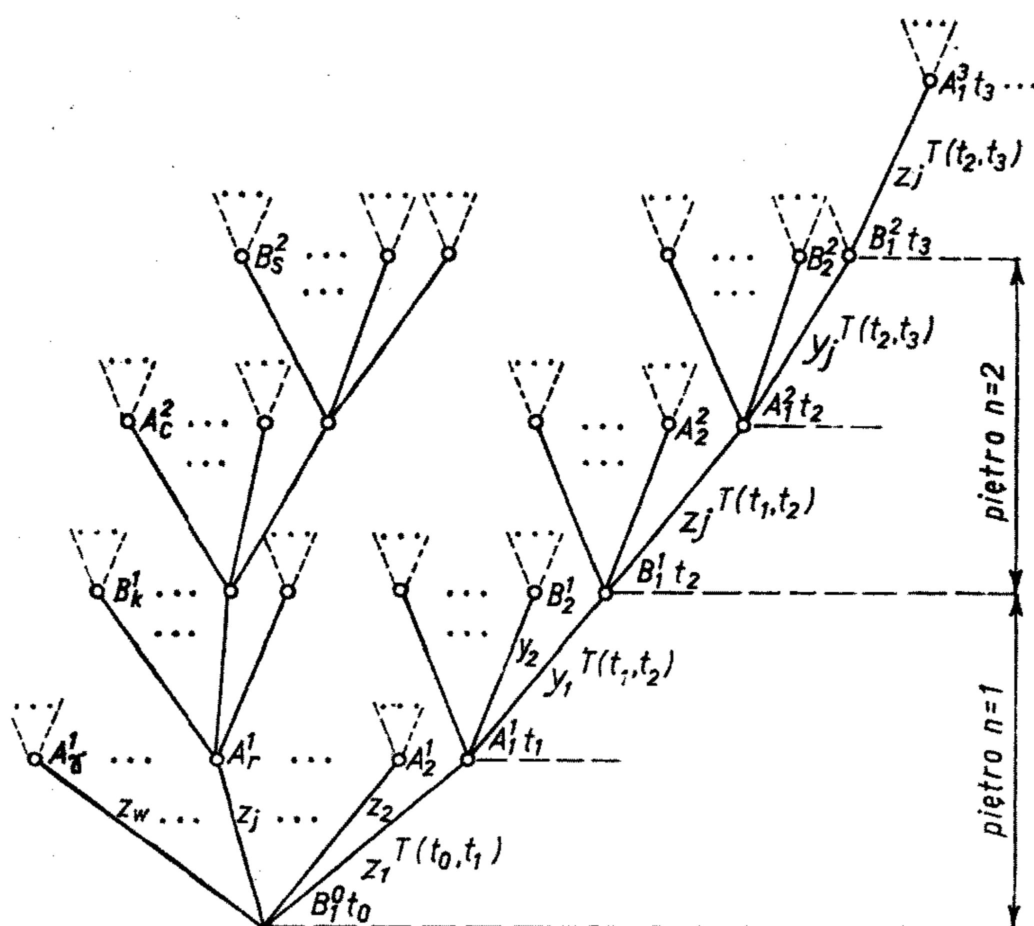
radarowego informację nie tylko o strategii chodowej obiektu B, lecz również o jego położeniu i prędkości. Stąd też w dyskretnych chwilach na wejściu automatu powinna pojawiać się trzyelementowa informacja określona wektorem
$b = [z_j, p_i, g_r]$, gdzie:

z_j — kierunek ruchu obiektu B,
p_i — wzajemne położenie obiektów względem siebie,
g_r — stosunek prędkości V_A/V_B.

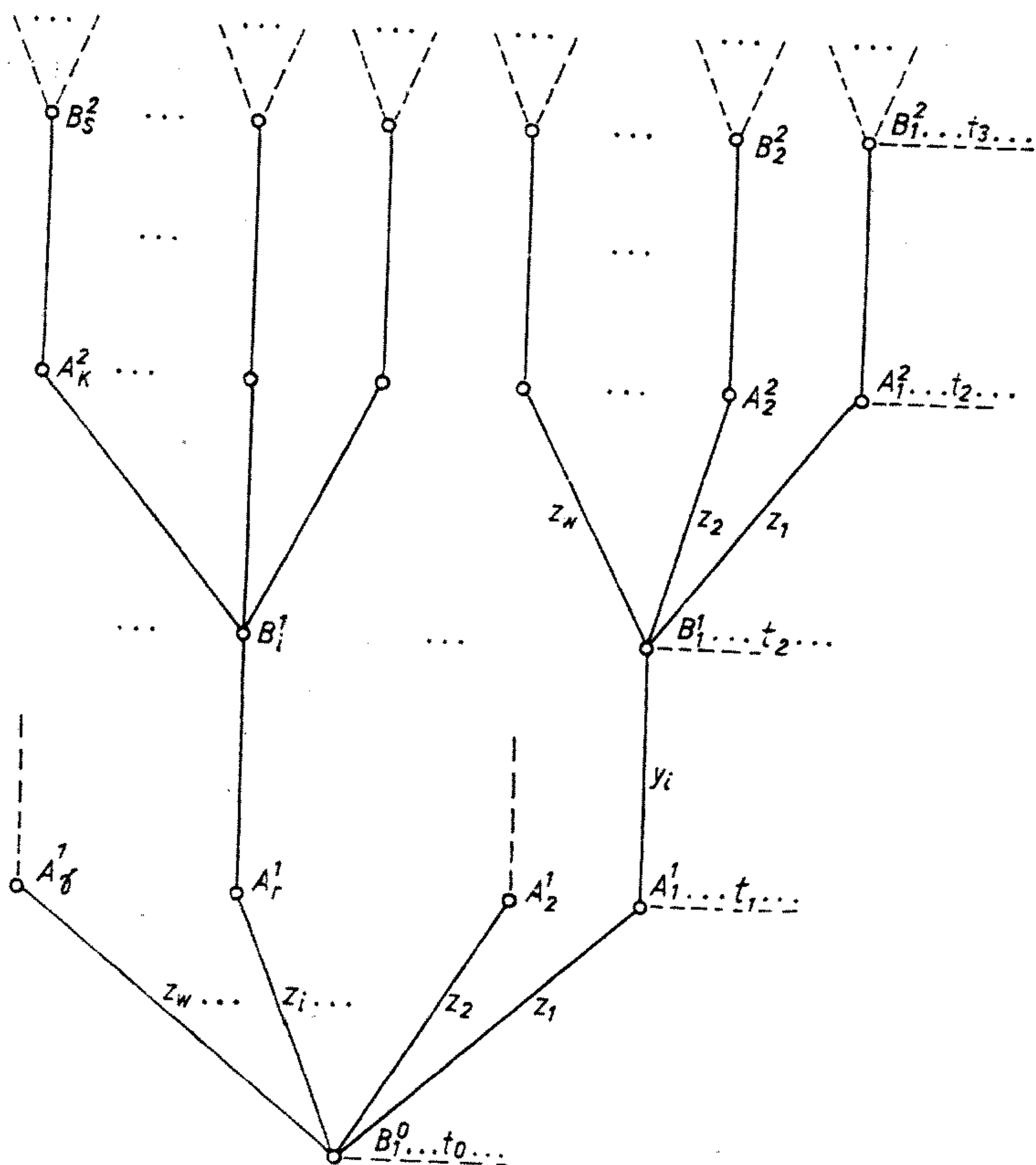
Pierwsza współrzędna wektora b jest strategią chodową strony B gry, natomiast pozostałe współrzędne p_i i g_r są parametrami gry wielochodowej opisującej proces pościgu. Jak wiadomo, postacią graficzną gry wielochodowej jest dendryt gry. Dla ilustracji przykład fragmentu dendrytu gry pościgu, przy zadanej wielkości parametru $g_r = V_A/V_B$ i określonego położenia początkowego obiektów p_i, przedstawiono na ryc. 36.

Każdy z wierzchołków dendrytu odzwierciedla sytuację powstałą w wyniku realizacji pościgu w danej dyskretnej chwili t i opisany jest symbolem obiektu, który w tej sytuacji dokonuje wyboru swojej strategii chodowej. Krawędzie dendrytu opisane są elementami y_i i z_j zbiorów Y i Z, a więc przedstawiają strategie chodowe obiektów. W każdym piętrze dendrytu wyróżnia się dwa poziomy, poziom wierzchołków A_r^n i poziom wierzchołków B_r^n. Wszystkie wierzchołki znajdujące się na danym poziomie dotyczą tej samej dyskretnej chwili t. Różnica w czasach opisujących dwa incydentne ze sobą wierzchołki (tj. połączone krawędzią) jest okresem, w ciągu którego wykonywana jest strategia chodowa przyporządkowana krawędzi łączącej te wierzchołki (na ryc. 36 i 37 okres ten dotyczy strategii gracza A).

Korzeniem dendrytu jest wierzchołek B^0_1, który określa sytuację początkową, jaka zaistniała w dyskretnej chwili t_0. Sytuacja ta jest opisana parą parametrów p_i, g_r. Zgodnie z dendrytem przedstawionym na ryc. 36, w sytuacji określonej wierzchołkiem B^0_1 obiekt B, jako strona gry, wybiera jedną z możliwych dla siebie strategii chodowych wchodzących w skład zbioru Z. W zależności od wybranej przez obiekt B strategii chodowej gra znajdzie się w jednym z wierzchołków A^1_1, A^1_2, ..., A^1_γ pierwszego piętra dendrytu. Załóżmy, że tym wierzchołkiem jest wierzchołek A^1_1, tzn., że w czasie $T_1 = t_1 - t_0$ obiekt B wykonał strategię chodową z_1. W chwili t_1, w sytuacji określonej



Ryc. 36



Ryc. 37

wierzchołkiem A_1^1, zgodnie z regułami gry obiekt A powinien przystąpić do wyboru i realizacji jednej ze swoich strategii chodowych przynależnych do zbioru Y. Strategie te opisują krawędzie wychodzące z wierzchołka A_1^1. Wybrana przez obiekt A strategia chodowa powinna być strategią optymalną, tzn. w wyniku jej zastosowania obiekt A powinien zbliżyć się jak najbardziej do obiektu B. Błędnie

wybrana strategia chodowa może nigdy nie doprowadzić do uchwycenia obiektu *B*.

Ponieważ proces pościgu jest procesem ciągłym i szybko zmieniającym się w czasie, przeprowadzenie przez obiekt *A* wyboru optymalnej strategii chodowej w trakcie jego lotu jest niemożliwe. Stąd też dendryt gry z ryc. 36 nie odzwierciedla właściwego działania obiektu *A*, gdyż każdej sytuacji określonej w dendrycie wierzchołkiem typu A_r^n musi być przyporządkowana tylko jedna strategia chodowa, a nie zbiór strategii. Należy więc przeprowadzić jednostronną optymalizację dendrytu gry, polegającą na wyeliminowaniu z dendrytu wszystkich niekorzystnych dla obiektu *A* jego strategii chodowych. Optymalizację taką przeprowadza się przy pomocy komputera, a jej wynikiem jest jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry, którego fragment przedstawiono na ryc. 37.

Przedstawione na rycinach 36 i 37 dendryty dotyczą tylko jednego wybranego położenia obiektów w przestrzeni. Jak wiadomo, liczba możliwych położeń dwóch punktów w przestrzeni jest nieskończenie duża. Każde położenie dwóch punktów w przestrzeni może być traktowane jako położenie wyjściowe obiektów w procesie pościgu, a więc każdemu z tych położeń należy przyporządkować jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry opisujący optymalne działanie obiektu *A*. Stąd też kompletny jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry opisującej proces pościgu będzie kompozycją nieprzeliczalnej ilości dendrytów składowych, z których każdy opisany będzie inną parą parametrów p_i, g_r. Gra wielochodowa opisująca proces pościgu w przestrzeni jest więc grą parametryczną, gdyż w zależności od wartości parametrów p_i, g_r reprezentowana jest ona przez inny dendryt składowy.

Kwantowanie przestrzeni

Model matematyczny, opisujący działanie obiektu *A* wykonującego pościg w przestrzeni, powinien umożliwić zarówno interpolację rzeczywistego przebiegu procesu pościgu przez automat rozgrywający sterujący tym obiektem, jak również samą realizację automatu. Modelem tym jest jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry składający się z nieskończonej ilości dendrytów składowych. Struktura jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry powinna być zapamiętana w strukturze automatu rozgrywającego. Ponieważ automat rozgrywający realizujący grę wielochodową jest automatem skończonym, tj. posiadającym skończoną liczbę stanów, realizacja omawianego typu automatu jest niemożliwa bez uprzedniego sprowadzenia dendrytu gry do postaci skończonej. Postać skończoną dendrytu gry można osiągnąć przez wprowadzenie założenia, że proces pościgu odbywa się w pewnej ograniczonej przestrzeni metrycznej.

Przestrzeń metryczna jest pojęciem zapożyczonym z topologii. Topologia jest działem współczesnej matematyki, zajmującym się badaniem takich cech tworów geometrycznych, które nie ulegają zmianie, gdy twory te poddajemy ściśle określonym przekształceniom (tzw. przekształceniom różnowartościowym i obustronnie ciągłym). Wymienione wyżej cechy tworów geometrycznych nazywamy niezmiennikami topologicznymi. Na przykład cecha kwadratu polegająca na tym, że jego obwód rozcina płaszczyznę na dwa obszary, jest niezmiennikiem topologicznym; jeśli kwadrat przekształcimy w koło, w elipsę, w trójkąt lub też w prostokąt, cecha ta zostanie zachowana, gdyż obwód każdej z otrzymanych figur geometrycznych, będących wynikiem

przekształcenia kwadratu, w dalszym ciągu dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Przekształcenie tego typu jest różnowartościowe, gdyż dowolnie wyróżniony punkt na obwodzie kwadratu odpowiada tylko jednemu punktowi okręgu koła i odwrotnie, a ponadto jest ono obustronnie ciągłe, co chyba w tym przypadku jest oczywiste. Ponieważ wymienione przez nas figury geometryczne można potraktować jako zbiory punktów, stąd też topologię możemy określić jako gałąź matematyki, która bada cechy zbiorów nie zmieniające się w wyniku pewnego typu przekształceń tych zbiorów na inne zbiory. Gdybyśmy np. założyli, że kwadrat zbudowany jest ze skończonej liczby punktów tworzących zbiór: $R = \{r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_k\}$, to w wyniku przekształcenia kwadratu w koło uzyskalibyśmy zbiór $S = \{s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_k\}$ zawierający taką samą liczbę elementów, z których każdy jest w dalszym ciągu punktem płaszczyzny, przy czym pola zbudowane z punktów $s_i \in S$ i $r_i \in R$ są sobie równe.

Zbiory, których określone cechy są obiektem badań w topologii, noszą nazwę przestrzeni topologicznych. Podstawowym typem przestrzeni topologicznej jest przestrzeń metryczna.

Dany zbiór H nazywamy przestrzenią metryczną wtedy, jeżeli każdej parze jego elementów, czyli każdej parze punktów h_r, h_j należących do zbioru H, przyporządkowana jest liczba rzeczywista $(h_r - h_j) \geqslant 0$, zwana odległością punktu h_r od punktu h_j, która spełnia następujące warunki:

1) $(h_r - h_j) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h_r = h_j$;
2) $(h_r - h_j) = (h_j - h_r)$;
3) $(h_r - h_j) + (h_j - h_s) \geqslant (h_r - h_s)$.

Zbiór H możemy podzielić na podzbiory. Każdy podzbiór przestrzeni metrycznej sam stanowi prze-

strzeń metryczną, oczywiście przy nie zmienionej definicji odległości. Maksymalną odległość $(h_r - h_j)$ punktów h_r i h_j przestrzeni metrycznej H nazywamy średnicą przestrzeni H. Przestrzenie metryczne o średnicy skończonej noszą nazwę przestrzeni metrycznych ograniczonych. Jeżeli przestrzeń metryczna H ma postać geometryczną sześcianu, a więc jest przestrzenią ograniczoną, to taką przestrzeń metryczną nazywać będziemy sześcianem metrycznym.

Sześcian metryczny jest bardzo cenną abstrakcją matematyczną przy rozpatrywaniu procesu pościgu w przestrzeni rzeczywistej. Zgodnie z podanym już wyżej założeniem będziemy przyjmować dalej, że rozpatrywany przez nas proces pościgu odbywa się w sześcianie metrycznym o odpowiednio ustalonych rozmiarach, uwarunkowanych odległością między obiektami A i B.

Sześcian metryczny obejmując obiekty A i B przemieszcza się w przestrzeni rzeczywistej z prędkością V_A, tj. z prędkością równą prędkości obiektu A.

Poprzez analogię do topologii, wprowadzony do rozważań sześcian metryczny będziemy traktować jako zbiór

$$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_j, \ldots, h_r, \ldots\}$$

w którym każdej parze elementów h_j, h_r, przynależnych do tego zbioru, przyporządkowana jest liczba rzeczywista $(h_r - h_j)$ nazywana odległością punktu h_r od punktu h_j. Każda para punktów sześcianu metrycznego określa możliwe położenie obiektów A i B w procesie realizacji pościgu.

Ze względu na dyskretyzację modelu matematycznego opisującego proces pościgu zachodzi konieczność ustalenia w zbiorze H, obejmującym wszystkie punkty sześcianu metrycznego, pewnych punktów jako punktów wyróżnionych. Punkty wyróżnione

sześcianu metrycznego tworzą zbiór

$$H' = \{h'_1, h'_2, ..., h'_i, ..., h'_s\}$$

Zbiór H' punktów wyróżnionych $h_i' \in H'$ jest zbiorem skończonym, a jednocześnie jest podzbiorem zbioru H, który z teoretycznego punktu widzenia jest zbiorem nieskończonym. Każdemu punktowi h'_i wyróżnionemu w sześcianie metrycznym przyporządkowane są te punkty nie wyróżnione, które znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie danego punktu wyróżnionego. Z tego też wynika, że każdemu punktowi wyróżnionemu h'_i przyporządkowana jest jak gdyby pewna mikroprzestrzeń metryczna, której środkiem jest dany punkt wyróżniony h'_i.

W niniejszym ujęciu mikroprzestrzeń metryczna jest pewną elementarną częścią składową sześcianu metrycznego, charakteryzującą się tym, że ma postać geometryczną sześcianu i jeden tylko punkt wyróżniony znajdujący się w jej środku. Zgodnie z topologią zdefiniowana wyżej mikroprzestrzeń rozpatrywana oddzielnie jest również przestrzenią metryczną ograniczoną swymi rozmiarami. W danym sześcianie metrycznym wszystkie mikroprzestrzenie mają jednakowe, ściśle określone rozmiary. Umownie przyjmuje się, że sześcian metryczny ma tyle mikroprzestrzeni, ile punktów wyróżnionych w swojej strukturze.

Wyróżnione punkty przestrzeni metrycznej są pomocne w procesie identyfikacji przez automat rozgrywający położenia obiektu B w sześcianie metrycznym. Bez względu na to czy obiekt B w danej dyskretnej chwili t znajduje się w wyróżnionym punkcie przestrzeni, czy też w dowolnym innym punkcie, informacja o położeniu obiektu B dotyczy tylko punktu wyróżnionego. Jeżeli np. w danej chwili t obiekt B znajduje się w pewnym punkcie h_r

przestrzeni metrycznej, który nie jest punktem wyróżnionym, na wejście automatu przychodzi informacja, że obiekt *B* znajduje się w takim punkcie wyróżnionym h'_i, w którego sąsiedztwie znajduje się punkt h_r.

Automat rozgrywający popełnia więc pewien błąd w identyfikacji rzeczywistego położenia obiektu *B*. Kres górny tego błędu zależy od rozmiarów mikroprzestrzeni przyporządkowanej punktowi wyróżnionemu, a tym samym od stopnia zagęszczenia punktów wyróżnionych w sześcianie metrycznym. Przy dużej odległości obiektów od siebie błąd ten ma mały wpływ na optymalność strategii chodowych wypracowywanych przez automat sterujący obiektem *A*. Natomiast przy małej odległości obiektów od siebie błąd ten rzutuje bardzo ujemnie na optymalne działanie obiektu *A*. Stąd też narzuca się konieczność przeprowadzenia zagęszczenia punktów wyróżnionych w sześcianie metrycznym w miarę zbliżania się obiektów do siebie. Zagęszczanie to uzyskuje się w wyniku odpowiedniego kwantowania przestrzeni metrycznej.

Kwantowanie kojarzy się nam zwykle z pojęciem kwantu, a tym samym z fizyką. Samo słowo kwant pochodzi od łacińskiego słowa *quantum* — ile. Z fizyki wiadomo, że promieniowanie nie jest emitowane w sposób ciągły, lecz określonymi porcjami energii. Te porcje lub pakiety energii promienistej przyjęto nazywać kwantami.

Przez analogię do kwantu energii promienistej możemy wprowadzać umownie pojęcie kwantu przestrzeni. Takim umownym kwantem przestrzeni może być sześcian metryczny o określonych rozmiarach. W procesie zbliżania się obiektów do siebie odległość między obiektami będzie się zmniejszać, aż wreszcie będzie tak względnie mała, że określenie

wzajemnego położenia obiektów w strukturze danego sześcianu będzie niemożliwe, gdyż brak będzie punktów wyróżnionych, którym można przyporządkować położenie obiektów. Zachodzi więc konieczność zbudowania na tej względnie małej odległości między obiektami nowego sześcianu metrycznego o takiej samej strukturze jak poprzedni, lecz o znacznie mniejszych rozmiarach. W strukturze nowego sześcianu liczba punktów wyróżnionych znajdujących się między obiektami będzie już tak dostatecznie duża, że umożliwi określanie wzajemnego położenia obiektów *A* i *B* zarówno w danej dyskretnej chwili, jak w chwilach późniejszych.

Ten nowy sześcian metryczny reprezentuje mniejszą porcję przestrzeni, inaczej mówiąc — kwant przestrzeni o mniejszej wartości. Po pewnym czasie obiekty *A* i *B* w strukturze nowego sześcianu metrycznego znowu będą znajdować się w tak małej odległości od siebie, że nie istnieje możliwość określenia ich wzajemnego położenia. Wystąpi więc potrzeba budowy nowego sześcianu metrycznego obejmującego znacznie mniejszą porcję przestrzeni.

W naszych rozważaniach przestrzeń metryczna jest pewną fikcyjną przestrzenią, która przemieszcza się w przestrzeni rzeczywistej z prędkością obiektu *A*. Co pewien czas ta przemieszczająca się przestrzeń skokowo zmniejsza swoje rozmiary nie zmieniając swojej struktury, która charakteryzuje się zawsze taką samą liczbą punktów wyróżnionych i takim samym ich rozmieszczeniem w sześcianie metrycznym. W powyższym procesie występuje jak gdyby pewne zjawisko kurczenia (zacieśniania) się przestrzeni, otrzymywane drogą pobierania coraz to mniejszych porcji przestrzeni. To porcjowanie przestrzeni przyjęto umownie nazywać kwantowaniem przestrzeni.

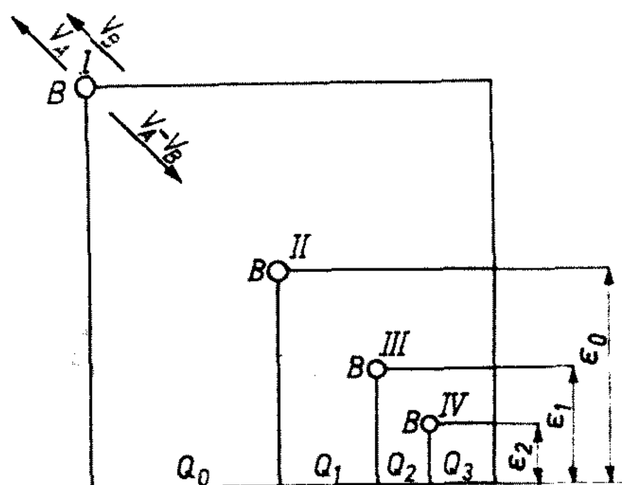
Kryterium tego kwantowania polega na przyjęciu ciągu sześcianów metrycznych o odpowiednio zmniejszających się rozmiarach. Ciąg ten ma postać

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, Q_{k+1}, \ldots, Q_\omega$$

przy czym $Q_k > Q_{k+1}$ oraz $Q_{k+1} \subset Q_k$.

Sześciany metryczne mają przyporządkowane sobie trzy parametry: liczbę k, zwaną stopniem kwantowania; liczbę l_k, określającą długość krawędzi sześcianu metrycznego o stopniu kwantowania k; liczbę ε_k, określającą warunek zakończenia gry w przestrzeni metrycznej o stopniu kwantowania k. Sześcian metryczny Q_0, tj. o stopniu kwantowania $k = 0$, zawiera sześciany metryczne o wszystkich pozostałych stopniach kwantowania od $k = 1$ do $k = \omega$.

W miarę zbliżania się obiektów do siebie następuje podział sześcianu Q_0 na coraz mniejsze sześciany



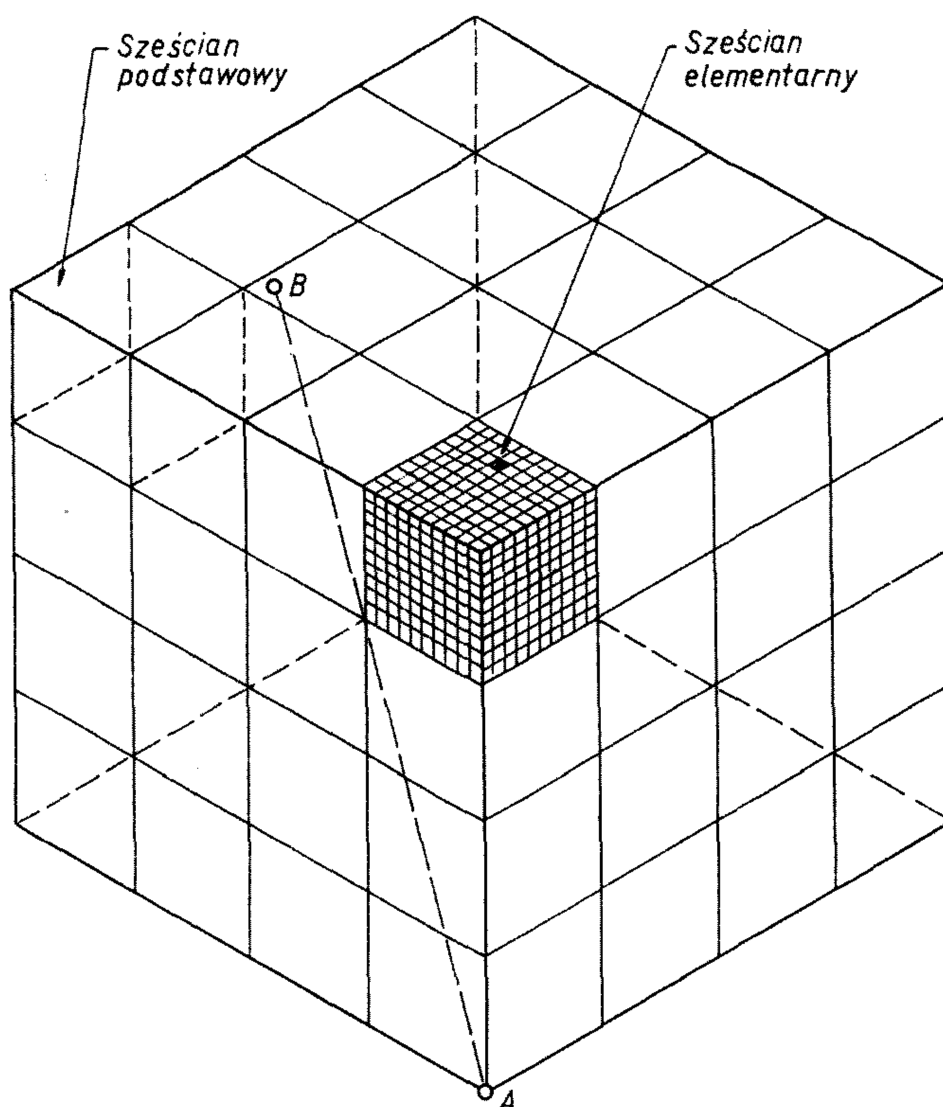
Ryc. 38

aż do sześcianu Q_ω włącznie. Dla ilustracji, na ryc. 38 przedstawiono podział sześcianu Q_0 na sześciany o stopniach kwantowania $k = 1, 2, 3$ przy założeniu, że obiekty A i B przemieszczają się tylko w jednej

płaszczyźnie przekroju poprzecznego sześcianu Q_0 i nie dokonują zmiany kierunków ruchu. Ponieważ sześcian metryczny przemieszcza się z prędkością V_A i zgodnie z kierunkiem ruchu obiektu A, można przyjąć, że położenie obiektu A w strukturze sześścianu nie ulega zmianie. Przy takim założeniu, obiekt B w obszarze sześcianu metrycznego będzie się jak gdyby zbliżał do obiektu A z prędkością $V_B^1 = V_A - V_B$. Dlatego też sekwencja kolejnych położeń obiektu B w obrębie sześcianu metrycznego jest odwrotna, niż by to wynikało z rzeczywistego kierunku ruchu tego obiektu. Na ryc. 38 kolejne położenia obiektu B, przy których następuje zmiana stopnia kwantowania, oznaczono symbolami I, II, III, IV.

Każdy sześcian metryczny, bez względu na przyporządkowany sobie stopień kwantowania k, składa się z odpowiedniej liczby sześcianów podstawowych, a te z kolei z sześcianów elementarnych. Strukturę sześcianu metrycznego przedstawiono poglądowo na ryc. 39.

Długość krawędzi sześcianu podstawowego, będącego częścią składową danego sześcianu Q_k, równa się zawsze liczbie ε_k. Jeżeli w trakcie pościgu w przestrzeni metrycznej o stopniu kwantowania k odległość między obiektami osiągnie wartość $l \leqslant \varepsilon_k$, następuje przejście procesu pościgu z sześcianu metrycznego Q_k do sześcianu metrycznego o wyższym stopniu kwantowania, tj. do Q_{k+1}. W wyniku tego przejścia ten sześcian podstawowy, w którym znajdują się aktualnie obiekty A i B, staje się sześcianem metrycznym i podlega podziałowi na przyporządkowane mu sześciany podstawowe i elementarne. Wierzchołki sześcianów elementarnych są punktami wyróżnionymi w przestrzeni objętej sześcianem metrycznym danego stopnia kwantowania k.



Ryc. 39

Liczba punktów wyróżnionych w strukturze sześcianu metrycznego jest stała i nie zależy od jego rozmiarów. Wraz ze skokowym zmniejszaniem się rozmiarów sześcianu metrycznego, podyktowanym zmianą stopnia kwantowania, następuje zagęszczenie punktów wyróżnionych, a tym samym maleje błąd w identyfikacji rzeczywistego położenia obiektu *B*.

Dendryt gry opisującej proces pościgu składa się z dendrytów składowych, z których każdy — przy założeniu, że $g_r = V_A/V_B = \text{const}$ — dotyczy określonego położenia obiektów *A* i *B* w sześcianie metrycznym. W sześcianie metrycznym położenie obiektów określa się według punktów wyróżnionych.

Ponieważ liczba punktów wyróżnionych w sześcianie metrycznym jest wielkością skończoną, liczba dendrytów jest również skończona. Stąd też dendryt gry opisującej proces pościgu możemy rozpatrywać jako zbiór skończony o postaci

$$D = \{d_1, d_2, ..., d_j, ..., d_v\}$$

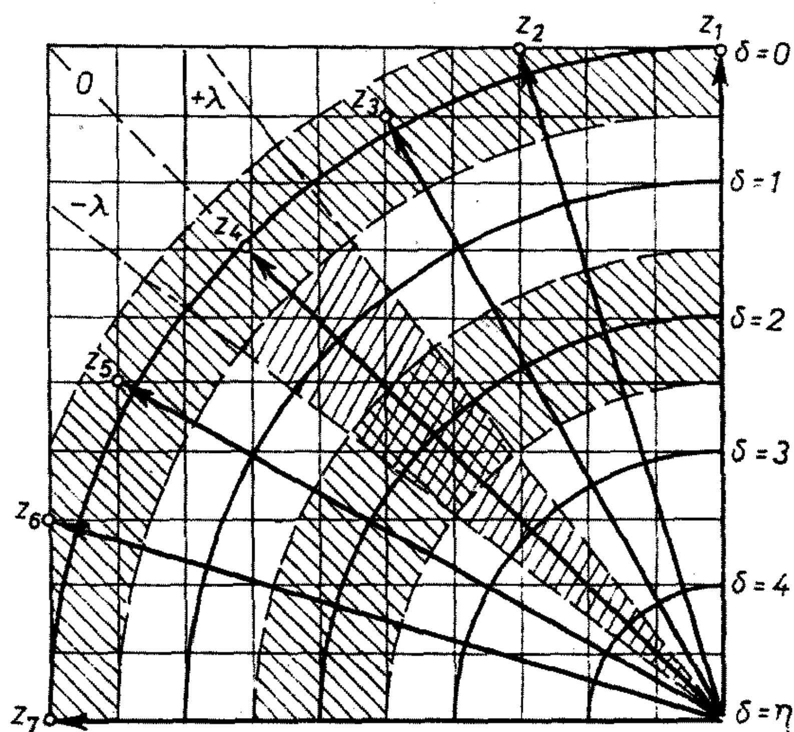
którego elementami są dendryty składowe d_j dla $j = 1, 2, ..., v$. Każdy z dendrytów składowych d_j jest jednostronnie zoptymalizowany na korzyść obiektu A jako strony gry, a tym samym określa zdeterminowane działanie automatu rozgrywającego w sytuacji opisanej parą parametrów p_i, g_r. Struktura pojedynczego dendrytu $d_j \in D$ nie zależy od stopnia kwantowania przestrzeni i dotyczy tej samej sytuacji w dowolnym sześcianie metrycznym z przyjętego ciągu sześcianów Q_0, Q_1, Q_2, ... Q_ω. W wyniku przyjętej metody kwantowania przestrzeni, proces pościgu można rozpatrywać jako grę złożoną z ciągu następujących po sobie i rozgrywanych między obiektami A i B partii gry. Każdy z dendrytów składowych $d_j \in D$ reprezentuje inną partię gry.

Po każdorazowej zmianie stopnia kwantowania przestrzeni rozpoczyna się nowa partia gry, reprezentowana tym samym lub innym dendrytem składowym d_j, w zależności od aktualnej sytuacji opisanej parą parametrów p_i, g_r. Fakt ciągłego powtarzania tej samej gry w procesie pościgu ułatwia i umożliwia budowę automatu rozgrywającego — sterującego obiektem A.

Aproksymacja trajektorii lotu obiektu ściganego

W grze wielochodowej, opisującej proces pościgu w przestrzeni, strategie chodowe strony B

gry określa się jako ruchy obiektu ściganego wzdłuż linii prostych. Tymi liniami są pewne ustalone promienie r_{bk} kuli wpisanej w sześcian zbudowany z czterech sześcianów podstawowych. Sposób określania strategii chodowych obiektu B dla jednej z możliwych płaszczyzn przekroju sześcianu podstawowego pokazano na ryc. 40.



Ryc. 40

Pojedyncza strategia chodowa obiektu B w danej przestrzeni kwantowania k realizowana jest w czasie $T_k = f(V_B)$, przy czym

$$T_k = t_{k,i} - t_{k,i-1}$$

gdzie $t_{k,i}$, $t_{k,i-1}$ — to dyskretne chwile działania automatu sterującego obiektem A. W czasie T_k, zgodnie z założeniem wynikającym z przyjętego modelu, obiekt B powinien przebyć drogę równą długości promienia r_{bk}. Długość promienia r_{bk} w obszarze sześcianu metrycznego danego stopnia

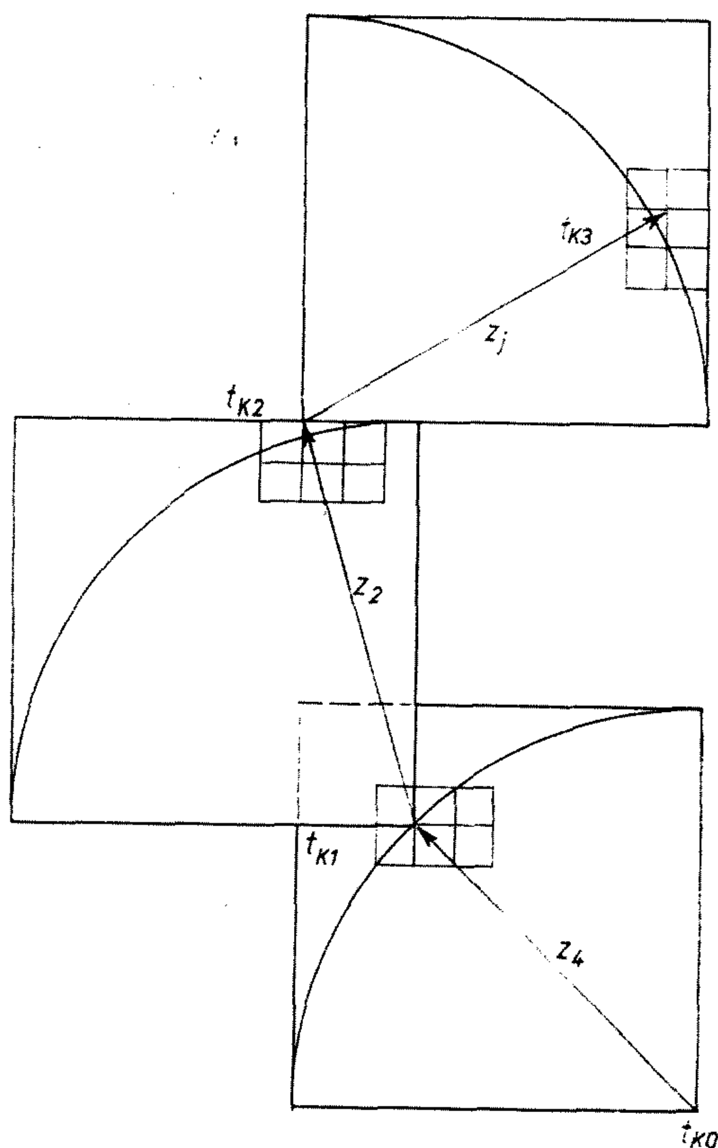
kwantowania k jest stała. Dzięki temu, że r_{bk} = const dla k = const, strategie chodowe obiektu B różnią się między sobą nie długością drogi przebytej w czasie T_k, lecz tylko przyporządkowanymi sobie kierunkami przemieszczania się obiektu B. Wiadomo jednak, że w trakcie pościgu prędkość obiektu B może się zmienić. Stąd też, aby uzyskać stałą długość drogi przebytej przez obiekt B w czasie T_k, każdemu sześcianowi metrycznemu przyporządkowana jest stała wartość parametru $g_r = V_A/V_B$. Konsekwencją takich ograniczeń jest to, że ze wzrostem prędkości obiektu B powinna wzrosnąć również prędkość obiektu A, gdyż stosunek $g_r = V_A/V_B$ w obrębie pojedynczego sześcianu metrycznego powinien być stały. Ponadto, gdy V_B rośnie, czas T_k powinien maleć tak, aby droga przebyta przez obiekt B w czasie T_k była w dalszym ciągu równa długości promienia r_{bk}. Nasuwa się więc wniosek, że przy zmianie prędkości V_B, dla k = const, automat rozgrywający powinien ustalać sobie nowe dyskretne chwile i wypracowywać sygnały zmiany prędkości obiektu A. Po przejściu procesu pościgu z sześcianu metrycznego o stopniu kwantowania k do sześcianu o stopniu kwantowania $k+1$, droga przebyta przez obiekt B w czasie $T_{k+1} = t_{k+1,l} - t_{k+1,l-1}$ staje się proporcjonalnie mniejsza, a tym samym spełniana jest nierówność

$$r_{b,k} > r_{b,k+1}$$

Według scharakteryzowanych wyżej ograniczeń dotyczących ruchów obiektu B, a wynikających z przyjętych reguł gry opisującej proces pościgu, obiekt B porusza się tylko wzdłuż umownych promieni kuli wpisanej w sześcian zbudowany z czterech sześcianów podstawowych danego sześcianu metrycznego i może dokonywać zmiany kierunku

ruchu tylko w ściśle określonych punktach sześcianu metrycznego.

Jedna z możliwych trajektorii lotu obiektu *B*, wynikających z reguł gry i rozpoznawanych przez automat rozgrywający, jest przedstawiona na ryc. 41. W rzeczywistości ruchy obiektu *B* nie są ograniczone regułami gry, nie zawsze są one prostoliniowe, a tym



Ryc. 41

samym zmiana kierunku ruchu obiektu *B* może nastąpić w dowolnym punkcie przestrzeni. Stąd też automat rozgrywający, sterujący obiektem *A*, będzie

popełniać błąd w procesie identyfikacji ruchów obiektu *B* jako ruchów po promieniach r_{bk}, tzn. po liniach prostych. Błąd ten nie może przekroczyć wartości dopuszczalnej w sześcianie metrycznym danego stopnia kwantowania *k*. W celu oszacowania tego błędu, przy określeniu strategii chodowych obiektu *B* każdej strategii chodowej $z_j \in Z$ przyporządkowuje się — oprócz kierunku charakteryzującego daną strategię — również pewien sektor o długości promienia r_{bk}. Takie przyporządkowanie łączy się z podziałem na sektory omówionej już wyżej kuli o promieniu r_{bk} i o środku, w którym w chwili $t_{k,i-1}$ znajduje się obiekt *B*. Ułatwia to oszacowanie błędu popełnionego w identyfikacji położenia obiektu *B* w następnej dyskretnej chwili $t_{k,i}$, na podstawie pewnych wielkości zwanych parametrami błędu λ i δ. Sektory strategii chodowych obiektu *B* oraz parametry błędu λ i δ pokazano poglądowo na ryc. 40. Parametr λ charakteryzuje odchylenie rzeczywistego kierunku, na którym znajduje się obiekt *B* w dyskretnej chwili $t_{k,i}$, od kierunku określonego strategią chodową $z_j \in Z$. Natomiast parametr δ charakteryzuje skrócenie promienia r_{bk} w wyniku nieprostoliniowego toru ruchu obiektu *B*.

Wartość parametrów λ i δ jest ustalana na podstawie uzyskanej od urządzenia radarowego informacji o położeniu obiektu *B* w danej dyskretnej chwili *t*. Aktualna wartość parametrów λ i δ umożliwia określenie przez automat rozgrywający sumarycznego błędu $\Delta_k(\lambda, \delta)$, jaki został popełniony w procesie identyfikacji rzeczywistego położenia obiektu *B* w chwili *t*. Wymiarem błędu sumarycznego $\Delta_k(\lambda, \delta)$ jest odległość punktu w przestrzeni, w którym w danej chwili *t* znajduje się obiekt *B*, od punktu, w którym obiekt *B* powinien się znajdować zgodnie z przyjętymi regułami gry.

Tak, jak to było powiedziane wyżej, automat rozgrywający steruje działaniem obiektu A zgodnie z takim jednostronnie zoptymalizowanym dendrytem d_j, składowym dendrytu D, który jest przyporządkowany sytuacji, jaka wystąpiła w momencie rozpoczęcia procesu pościgu w sześcianie metrycznym o danym stopniu kwantowania k. Osiągnięcie przez wielkość $\Delta_k(\lambda, \delta)$ ustalonej wartości granicznej oznacza, że dalsze sterowanie obiektem A według dendrytu $d_j \in D$ jest niedopuszczalne i powinno nastąpić przejście do innego dendrytu $d_s \in D$ opisanego tym samym parametrem g_r, lecz innym parametrem p_l.

Takie przejście między dendrytami jest konsekwencją naruszenia reguł gry w wyniku błędu popełnionego przez automat. Całkowite wyeliminowanie błędu określonego wielkością $\Delta_k(\lambda, \delta)$ następuje przy przejściu procesu pościgu z sześcianu metrycznego o stopniu kwantowania k do sześcianu metrycznego o stopniu kwantowania $k+1$, gdyż nowy cykl gry rozpoczyna się zawsze względem rzeczywistego położenia obiektu B. Wymienione parametry błędów, jak również inne nie wymienione tutaj czynniki, pociągają za sobą konieczność nałożenia na strukturę jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu $D = \{d_1, d_2, ..., d_j, ..., d_v\}$ dodatkowych grafów. Jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry wraz z nałożonymi na niego dodatkowymi grafami nazwiemy umownie grafem pościgu.

Automat rozgrywający — sterujący obiektem w procesie pościgu

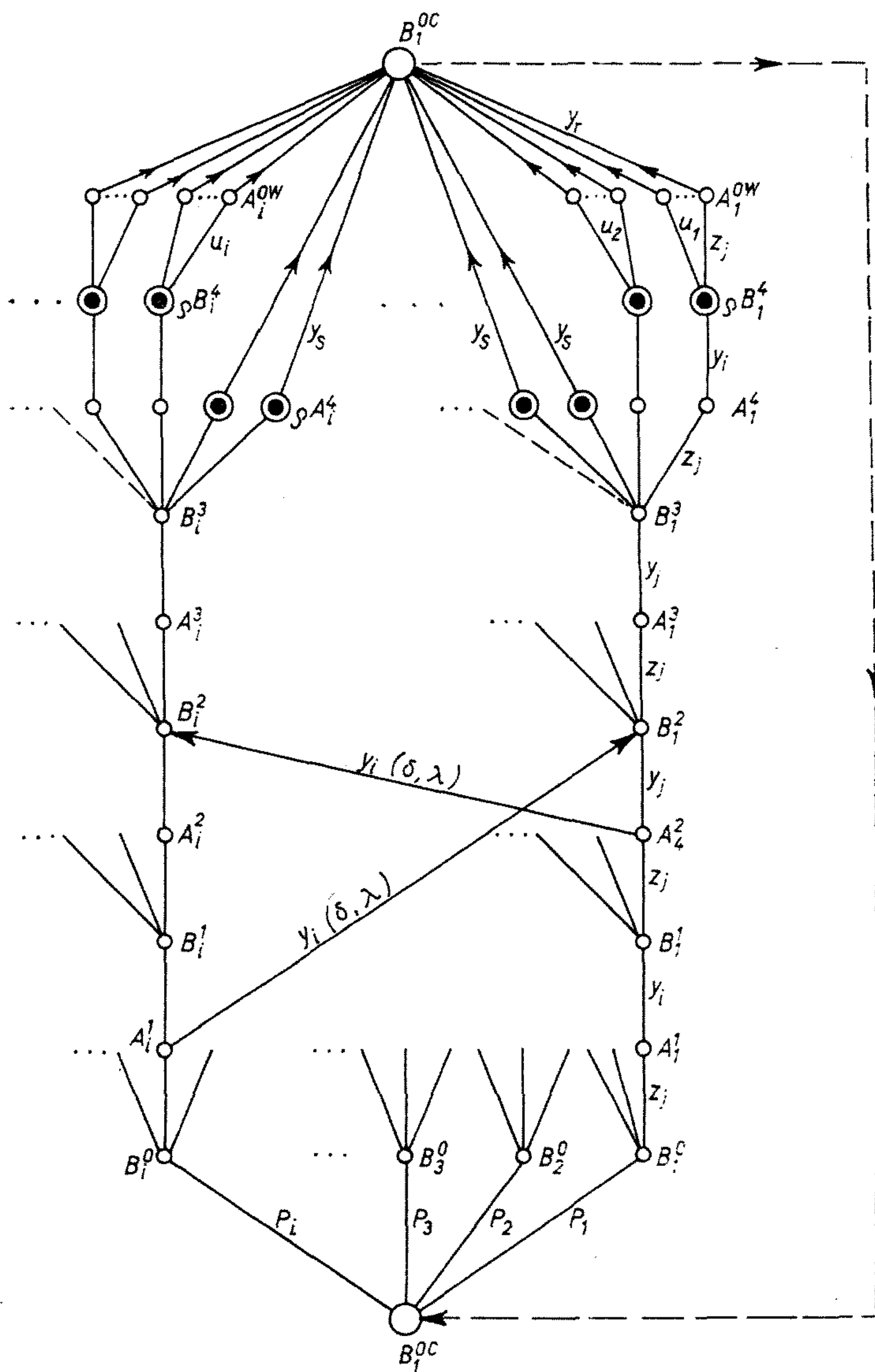
Postacią graficzną modelu matematycznego opisującego proces pościgu w przestrzeni jest graf

pościgu. Graf pościgu określa zdeterminowane działanie automatu sterującego obiektem A w procesie pościgu. Wierzchołki grafu oznaczone symbolami B_r^n reprezentują stany wewnętrzne automatu, natomiast krawędzie grafu reprezentują sygnały wejściowe lub wyjściowe automatu, w zależności od tego czy opisane są one symbolami typu z_j, czy też y_i.

Graf pościgu najwygodniej jest przedstawić na płaszczyźnie walcowej, dzięki czemu można wykazać, że wierzchołek końcowy grafu pościgu jest jednocześnie jego wierzchołkiem początkowym. Rysowanie kompletnego grafu pościgu jest mało przydatne z praktycznego punktu widzenia, gdyż zamiast tego wygodniej jest wyrazić go postacią numeryczną, tj. przy pomocy odpowiednich tablic.

Natomiast bardzo istotna jest znajomość struktury grafu pościgu, gdyż określa ona jednocześnie strukturę i sposób działania automatu sterującego obiektem A. Strukturę grafu pościgu przedstawiono poglądowo na ryc. 42. Wyróżnia się w niej następujące podgrafy:

1. Dendryt d_0 początkowych położeń obiektów, składający się z wierzchołka B_1^{0C} i z krawędzi opisanych parametrami p_i;
2. Dendryty składowe $d_j \in D$ tworzące dendryt D, z których każdy posiada przyporządkowany sobie oddzielny wierzchołek początkowy B_i^0;
3. Dendryty uzupełniające u_1, u_2, u_3, ..., zapewniające przejście gry ze stopnia kwantowania k do $k+1$. Wierzchołki początkowe tych dendrytów są wierzchołkami końcowymi ρB_i^n i ρA_i^n dendrytów $d_j \in D$;
4. Krawędzie przejść między dendrytami $d_j \in D$ uwarunkowane dużą wartością błędu sumarycznego $\Delta_k(\lambda, \delta)$.



Rys. 42

Podstawową częścią grafu pościgu jest dendryt $D = \{d_1, d_2, ..., d_j, ..., d_v\}$, który w głównej mierze rzutuje na strukturę automatu rozgrywającego. Natomiast pozostałe podgrafy grafu pościgu rzutują na sterowanie strukturą automatu rozgrywającego. Struktura automatu rozgrywającego jest jak gdyby pewnym fizycznym modelem struktury dendrytu D. Od wielkości dendrytu D zależą rozmiary modelującego ten dendryt automatu rozgrywającego. Bardzo istotna jest więc minimalizacja struktury dendrytu D w celu określenia zminimalizowanej struktury automatu rozgrywającego. Minimalizacja dendrytu D sprowadza się do zmniejszenia liczby jego wierzchołków i krawędzi. Ponieważ dendryt D jest zbiorem dendrytów składowych d_j, minimalizacji podlega każdy dendryt tego zbioru.

Minimalizacja pojedynczego dendrytu składowego $d_j \in D$ polega na ustaleniu jego izomorficznych części składowych, tj. części opisanych tymi samymi elementami z_j i y_i, a następnie nałożeniu tych części na siebie. Czynność tę wykonuje komputer. Dokonując porównania dwóch dowolnych zminimalizowanych dendrytów $d_j \in D$ i $d_r \in D$ można stwierdzić, że mają one strukturę częściowo lub całkowicie izomorficzną (tj. podobną). Istnieje więc możliwość nałożenia na siebie wszystkich zminimalizowanych dendrytów d_j wchodzących w skład dendrytu D. W wyniku przeprowadzenia takiej operacji struktura dendrytu D zostanie zredukowana do struktury tylko jednego ściśle określonego dendrytu $d_1 \in D$. Zminimalizowany w ten sposób dendryt D nazwiemy dendrytem wynikowym i oznaczymy go symbolem D_k. Aby można było posługiwać się dendrytem $D_k = d_1$ w odniesieniu do wszystkich możliwych dendrytów $d_j \in D$, należy określić zależności między elementami z_j, y_i, opisu-

jącymi strukturę dendrytu $d_1 = D_k$, a elementami z_j, y_i, opisującymi strukturę dowolnie innego dendrytu d_j. Określenie takiej zależności umożliwia z kolei określenie sposobu sterowania automatu samym sobą. Konieczność takiego sterowania wynika z tego, że program działania automatu rozgrywającego jest określony strukturą automatu, w więc jest programem sztywnym.

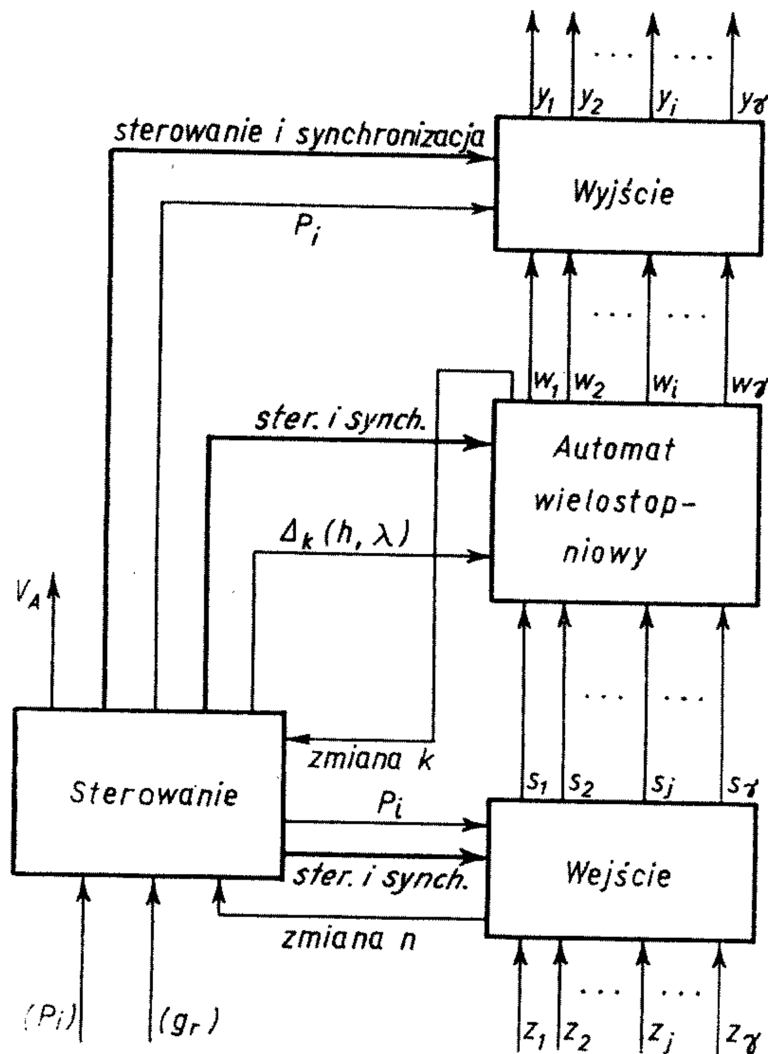
Sterując odpowiednio strukturą automatu dostosowujemy program jego działania do wszystkich tych sytuacji, które mogą zaistnieć w procesie pościgu.

Schemat blokowy automatu rozgrywającego, sterującego obiektem w procesie pościgu, przedstawiono na ryc. 43. Z rysunku widać, że w strukturze tego typu automatu wyróżnia się cztery podstawowe bloki funkcjonalne: 1. Automat wielostopniowy, 2. Sterowanie, 3. Wejście, 4. Wyjście.

Automat wielostopniowy jest automatem skończonym modelującym strukturę grafu D_k, który jest wynikiem minimalizacji jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu D. Składa się on z automatów jednostopniowych, z których każdy przyporządkowany jest oddzielnemu piętru grafu D_k (por. rozdział 5).

Program działania automatu wielostopniowego jest określony strukturą automatu — jest to program sztywny, a jego obrazem graficznym jest dendryt $d_1 = D_k$. Sterując strukturą automatu wielostopniowego można zmienić program jego działania z $d_1 = D_k$ na dowolnie inny, określony przez $d_j \in D$ przy $j \neq 1$. Inaczej mówiąc, w wyniku sterowania samym sobą automat rozgrywający ma możliwość dostosowania swojej struktury do zmodelowania takiego dendrytu d_j, który dla danej sytuacji powstałej w procesie pościgu jest programem optymalnego sterowania obiektem A.

Zadanie to spełnia blok sterowania. Oprócz wymienionego, do ważniejszych zadań realizowanych przez blok sterowania należy zaliczyć: 1. Kwantowanie w czasie procesu pościgu przez wypracowanie



Ryc. 43

dyskretnych momentów czasu działania automatu wielostopniowego; 2. Sterowanie działaniem automatu wielostopniowego w funkcji wartości odchylenia $\Delta_k(\lambda, \delta)$; 3. Wypracowywanie sygnału zmiany prędkości V_A; 4. Sterowanie wejściem i wyjściem automatu rozgrywającego.

Podstawowymi elementami bloku sterowania są: generator impulsów taktowych, licznik stopnia kwantowania k, licznik posunięć n, liczniki parametrów p_i, g_r, λ, δ, $\Delta_k(\lambda, \delta)$.

Głównym zadaniem bloku wejścia automatu rozgrywającego jest realizacja funkcji zamiany strategii chodowych typu $z_j \in Z$ na fikcyjne strategie chodowe $s_j \in S$ (por. w 3 rozdziale podrozdział „Gry wielochodowe parametryczne"). Wiadomo, że w omawianym procesie pościgu strategie chodowe $z_j \in Z$ dotyczą pewnych wyróżnionych kierunków przemieszczania się w przestrzeni obiektu B, który w wielochodowej grze parametrycznej reprezentuje gracza B.

Na wejściu automatu rozgrywającego strategie chodowe $z_j \in Z$ mają postać sygnałów elektrycznych — impulsów prądowych lub napięciowych. Sygnały te wytwarzane są przez odpowiednie układy elektroniczne urządzenia radarowego, znajdującego się w obiekcie A. Dla uproszczenia rozważań można przyjąć, że na wejściu automatu rozgrywającego każdej strategii chodowej $z_j \in Z$ przyporządkowany jest oddzielny przewód (ryc. 43). Jeżeli więc w czasie $T_i = t_i - t_{i-1}$ obiekt B wykonał strategię chodową $z_r \in Z$, to od urządzenia radarowego na przewód z_r bloku wejścia podawany jest impuls napięcia przedstawiający sygnał jedynkowy. Sygnał ten przewodem z_r wchodzi do bloku wejścia. Blok wejścia zbudowany jest ze złożonych układów logicznych, które pod działaniem sygnałów sterujących pochodzących z bloku sterowania kierują sygnał z_r na odpowiedni przewód wyjściowy bloku wejścia. Przewody wyjścia bloku wejścia opisane są symbolami $s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_q$, z których każdy reprezentuje odpowiedni sygnał wejściowy automatu wielostopniowego. Wiadomo, że obrazem graficznym działania automatu

wielostopniowego jest dendryt wynikowy D_k. Krawędzie dendrytu D_k są opisane symbolami fikcyjnych strategii chodowych graczy, tj. symbolami $s_j \in S$ dla gracza B i $w_i \in W$ dla gracza A (por. wyrażenie 3.11. i 3.12). Pojawienie się na wejściu automatu rozgrywającego w danej dyskretnej chwili t_i sygnału z_r jeszcze nie określa jednoznacznie sygnału wejściowego automatu wielostopniowego. Aby ten sygnał można było określić, z bloku sterowania na blok wejścia podawane są następujące sygnały sterujące:
— sygnał p_i, wyrażający informację o położeniu początkowym obiektów w sześcianie metrycznym o aktualnym stopniu kwantowania k;
— sygnał g_r, przedstawiający informację o wartości stosunku prędkości V_A/V_B;
— sygnał n, wskazujący numer kolejnego posunięcia w grze opisującej proces pościgu w sześcianie metrycznym o aktualnych wartościach parametrów k, p_i, g_r.

Wymienione trzy sygnały p_i, g_r, n, podawane na blok wejścia, wyznaczają dla sygnału z_r drogę przepływu na jedno tylko ściśle określone wyjście typu s_j, co jest jednoznaczne z zamianą strategii chodowej z_r na strategię s_j (por. ryc. 43).

W podobny sposób, jak blok wejścia, działa blok wyjścia automatu rozgrywającego. Blok wyjścia zamienia sygnały wyjściowe automatu wielostopnioa wego, oznaczone na ryc. 43 symbolami $w_i \in W$, na sygnały $y_i \in Y$ będące strategiami chodowymi gracz A, a tym samym decyzjami do działania obiektu A

Wypracowane przez automat rozgrywający sygnały y_i podawane są na odpowiednie urządzenia wykonawcze obiektu A, które sterują kierunkiem lotu obiektu A, przy czym w każdej dyskretnej chwili t_j na urządzenie wykonawcze podawany jest tylko jeden sygnał y_i przynależny do zbioru Y.

Obiekt, wyposażony w, omówiony wyżej typ automatu skończonego, ma pełną autonomię w podejmowaniu decyzji wynikających z realizacji procesu pościgu w przestrzeni. Uzasadnione staje się więc nazwanie go samodzielnym obiektem cybernetycznym, gdyż nie jest on sterowany z Ziemi, skąd co najwyżej może być kontrolowane tylko jego działanie.

Scharakteryzowane na przykładzie procesu pościgu w przestrzeni działanie obiektu cybernetycznego w przestrzeni można uogólnić na całą klasę innych zadań, które mogą być wykonywane przez tego typu obiekty. W świetle tendencji rozwojowych cybernetyki i astronautyki przydatność użytkowa tych cybernetycznych obiektów jest niewątpliwie bardzo duża.

8

Diagnostyka i gry

Jedną z dyscyplin naukowych związanych obecnie ściśle z cybernetyką jest diagnostyka. Wynika to m.in. z tego, że domeną zainteresowań cybernetyki są systemy z zachowaniem celowym oraz zachodzące w tych systemach procesy samosterowania. Z kolei wiadomo, że dowolny system z zachowaniem celowym będzie funkcjonował właściwie tylko wtedy, gdy będzie sprawny. Jeżeli system jest niesprawny, jego działanie przestaje być celowe, a w najlepszym przypadku nie jest ono optymalne. Zachodzi więc konieczność ustalenia przyczyn niesprawności systemu. Ponieważ system jest na ogół zbiorem elementów powiązanych ze sobą określonymi relacjami, ustalenie źródła niesprawności systemu związane będzie z lokalizacją uszkodzonego elementu. Dyscypliną naukową zajmującą się metodami lokalizacji źródeł niesprawności w systemach jest właśnie diagnostyka. Proces polegający na praktycznym wykorzystaniu jednej z metod diagnostyki do ustalenia źródła niesprawności w systemie nosi nazwę procesu diagnostycznego, a jego wynikiem jest diagnoza.

Diagnostykę możemy podzielić na medyczną i techniczną. W diagnostyce medycznej obiektem badań

są organizmy żywe, a w szczególności organizm człowieka, natomiast w diagnostyce technicznej obiektem badań są urządzenia techniczne. W cybernetyce abstrahuje się bardzo często od wymienionego podziału diagnostyki i rozpatruje się ją w ujęciu ogólnym, przyjmując, że obiektami badań są systemy z zachowaniem celowym. Systemy te są na ogół spójne. System spójny charakteryzuje się tym, iż każdy funkcjonalny element systemu jest w taki sposób związany z innymi, że zmiana stanu w tym elemencie wywołuje zmianę stanu systemu. W systemie można wyróżnić dwa rodzaje stanów: stany diagnostyczne i stany funkcjonalne. Stany funkcjonalne systemu wynikają z funkcji opisujących działanie systemu. Natomiast stany diagnostyczne systemu są określone przez stopień sprawności systemu. Stany diagnostyczne systemu możemy podzielić na makrostany diagnostyczne, tj. makrostan E — system sprawny oraz makrostan C — system niesprawny. System znajduje się w makrostanie E, jeżeli wszystkie elementy systemu są sprawne. Podobnie system będzie znajdować się w makrostanie C, jeżeli co najmniej jeden z jego elementów będzie niesprawny. Makrostan C jest następującym zbiorem stanów diagnostycznych

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_v\} \tag{8.1}$$

gdzie c_i — i-ty stan diagnostyczny, sygnalizujący uszkodzenie jednego z elementów systemu.

Diagnostyka łączy się ściśle z kontrolą sprawności systemu. Zadaniem kontroli sprawności systemu jest określenie aktualnego makrostanu diagnostycznego. Jeżeli aktualnym makrostanem jest C, wówczas powinien nastąpić proces diagnostyczny sprowadzający się do określenia aktualnego stanu diagnostycznego $c_i \in C$.

W celu określenia aktualnego stanu diagnostycznego $c_i \in C$ należy wykonać cały ciąg operacji sprawdzających tak, aby na podstawie otrzymanych wyników (odpowiedzi systemu na operacje sprawdzające) można było zlokalizować uszkodzenie w systemie. Trudność rozwiązania tego zadania polega na podjęciu decyzji, jakie operacje sprawdzające należy zastosować i w jakiej kolejności.

Ciąg operacji sprawdzających dla systemu będącego obiektem diagnostycznym przyjęto nazywać pełnym testem diagnostycznym, natomiast pojedyncze operacje sprawdzające przyjęto nazywać testami elementarnymi. Zbiór elementarnych testów diagnostycznych dla danego obiektu diagnostycznego (systemu) jest z reguły zbiorem skończonym. Zbiór ten symbolicznie oznaczymy jako

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_w\} \qquad (8.2)$$

Na każdy elementarny test diagnostyczny $y_i \in Y$, doprowadzony w taki czy inny sposób na odpowiednie wejście obiektu diagnostycznego, następuje określona reakcja obiektu diagnozowanego, będąca pewną formą odpowiedzi tego obiektu na zadany test. Odpowiedzi obiektu diagnostycznego na pojedyncze elementarne testy diagnostyczne noszą nazwę symptomów elementarnych. Z kolei na podstawie ściśle określonego ciągu symptomów elementarnych można jednoznacznie ustalić źródło niesprawności w diagnozowanym obiekcie (systemie). Symptomy elementarne tworzą zbiór skończony

$$Z = \{z_1, z_2, ..., z_j, ..., z_s\} \qquad (8.3)$$

Przy badaniu obiektu diagnostycznego niewłaściwą sekwencją testów elementarnych, odpowiedź obiektu, reprezentowana określoną sekwencją symptomów elementarnych, uniemożliwia lokalizację źródła nie-

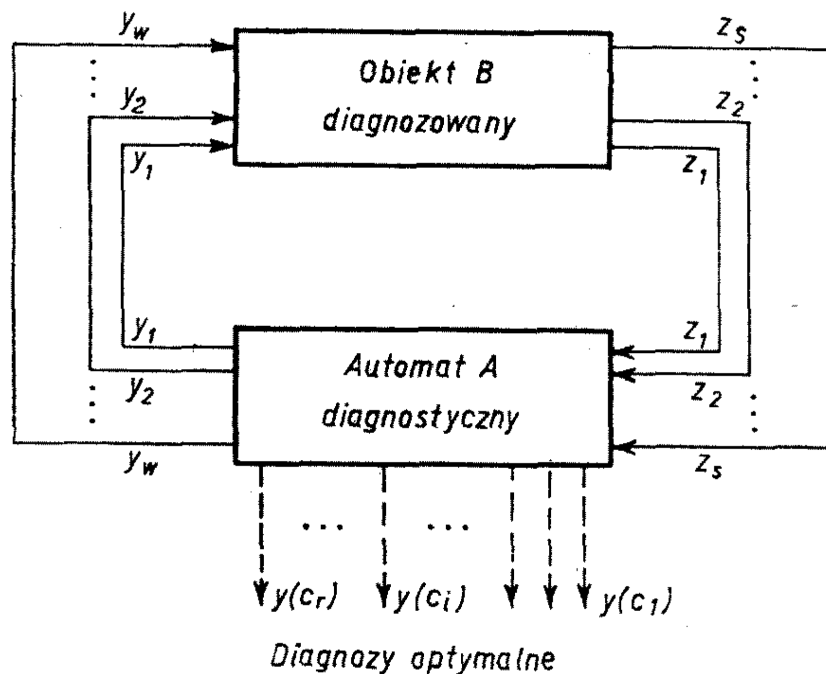
sprawności w obiekcie. Zachodzi więc potrzeba opracowania odpowiedniej metody wyboru optymalnych testów elementarnych tak, aby ich sekwencja doprowadziła do takiej sekwencji odpowiedzi obiektu diagnostycznego, która jednoznacznie określa źródło niesprawności. Stąd też proces diagnostyczny najdogodniej jest opisać postacią dwuosobowej gry wielochodowej. Grę taką będziemy nazywać grą diagnostyczną. W grze diagnostycznej występuje dwóch graczy: gracz *B*, będący obiektem diagnozowanym, oraz gracz *A*, dążący do odgadnięcia aktualnego stanu diagnostycznego obiektu *B*.

Ze względu na automatyzację procesu diagnostycznego, graczem *A* powinien być pewien automat diagnostyczny działający zgodnie z regułami prowadzenia gry wielochodowej. Celem gry jest identyfikacja stanu diagnostycznego obiektu *B* przez gracza *A*. W tym też celu gracz *A* będzie dążył do określenia stanu obiektu *B* drogą testowania obiektu *B* ciągiem pytań — testów elementarnych. Przy odpowiednim doborze ciągu testów elementarnych, ciąg odpowiedzi obiektu *B* powinien jednoznacznie określić jego stan diagnostyczny. Gra diagnostyczna jest grą z naturą, gdyż obiekt *B* nie jest zainteresowany w zatajeniu swego stanu. Odpowiedzi obiektu *B* na elementarne testy zadawane przez gracza *A* są pewnymi elementarnymi symptomami stanu, w jakim znajduje się obiekt *B*. Gdy elementarne testy diagnostyczne będą przez gracza *A* dobrane niewłaściwie, nie będzie on mógł odgadnąć, na podstawie uzyskanych od obiektu *B* odpowiedzi-symptomów, właściwego stanu tego obiektu i wówczas grę przegrywa.

Przy właściwym doborze testów elementarnych gracz *A* grę wygrywa, gdyż odpowiedzi-symptomy obiektu *B* jednoznacznie określają jego stan. Wy-

grana gracza A będzie tym większa, im będzie mniejsza liczba testów elementarnych wykorzystanych przez gracza A dla zidentyfikowania danego stanu diagnostycznego obiektu B.

Schemat blokowy układu złożonego z automatu diagnostycznego A i obiektu diagnozowanego B przedstawiono na ryc. 44. Automat A jako strona



Ryc. 44

gry dysponuje zbiorem strategii chodowych Y, określonym przez wyrażenie (8.2), natomiast obiekt diagnozowany B dysponuje zbiorem strategii chodowych Z, określonym wyrażeniem (8.3). Zbiór wyników końcowych diagnostycznej gry można uzyskać ze zbioru C przez uzupełnienie go elementem „pustym" e — zbiór ten będzie się przedstawiał następująco

$$C' = \{e, c_1, c_2, ..., c_i, ..., c_v\} \tag{8.4}$$

Element „pusty" $e \in C'$ określa negatywny wynik gry dla gracza A, aktualny wtedy, gdy gracz zasto-

Ryc. 45

sował w grze błędną sekwencję swoich strategii chodowych. Graficzną postacią gry wielochodowej jest dendryt gry. Przykładowy fragment dendrytu gry diagnostycznej przedstawiono na ryc. 45.

Każdemu wierzchołkowi typu B_k^n dendrytu gry diagnostycznej, gdzie: n — piętro dendrytu, k — numer porządkowy wierzchołka w piętrze, przyporządkowany jest pewien podzbiór stanów diagnostycznych, przynależnych do zbioru C. Wierzchołkowi początkowemu dendrytu B_i^0 przyporządkowany jest cały zbiór C. Krawędzie wychodzące z wierzchołka początkowego dendrytu są opisane elementami $z_j \in Z$, które reprezentują symptomy stanu diagnostycznego i wykazują, w jakim podzbiorze zbioru C znajduje się aktualny stan diagnostyczny obiektu B.

W procesie realizacji gry diagnostycznej następuje stopniowe zawężanie zbioru C aż do momentu, gdy w zawężonym zbiorze C znajdzie się tylko jeden element $c_j \in C$ i to taki, który sygnalizuje aktualny stan diagnostyczny obiektu B.

Zbiór C możliwych stanów diagnostycznych charakteryzuje się tym, że każdy element c_j tego zbioru przyporządkowany jest tylko jednemu elementowi x_j wchodzącemu w skład obiektu diagnozowanego B. Jeżeli dany element x_j obiektu diagnozowanego B jest uszkodzony, to stan diagnostyczny c_j przyporządkowany temu elementowi jest elementem wyróżnionym w zbiorze C. Stąd też po określeniu w procesie realizacji gry diagnostycznej aktualnego stanu diagnostycznego c_j obiektu B, jednoznacznie zostanie zlokalizowany uszkodzony element. Po zlokalizowaniu uszkodzonego elementu x_j obiektu B, automat diagnostyczny A powinien wytworzyć sygnał zakończenia procesu diagnostycznego ze wskazaniem wyniku tego procesu, tzn. optymalnej diagnozy. W dendrycie gry diagnostycznej sygnał ten jest reprezentowany strategią chodową $y(c_j)$, tzn. strategią przyporządkowaną danemu wierzchołkowi końcowemu.

Dla ilustracji tego zagadnienia rozpatrzmy frag-

ment dendrytu gry diagnostycznej, przedstawiony na ryc. 45. Pierwszym sygnałem podawanym na wejście obiektu diagnozowanego B jest test kontrolny y_9. Na test kontrolny y_9 następuje odpowiednia reakcja obiektu B, zgodnie z opisem krawędzi wychodzących z wierzchołka początkowego B_9^0 dendrytu gry. Zgodnie z dendrytem z ryc. 45 odpowiedź obiektu B na test kontrolny y_9 strategią chodową z_5 rozpoczyna dwuosobową grę wielochodową.

Strategią chodową z_5 obiekt B sygnalizuje zbiór stanów diagnostycznych, w których obiekt B może się znajdować w wyniku powstałego uszkodzenia. Zbiór ten wynosi np.

$$C = \{c_1, c_2, c_3\}$$

Po wykonaniu przez obiekt B strategii chodowej z_5, sytuacja powstała w grze jest określona wierzchołkiem A_1^1. W sytuacji A_1^1 strona A gry diagnostycznej może zastosować test y_1, y_2 lub dowolną inną strategię chodową y_i ze zbioru Y. Zależnie od zastosowanych strategii chodowych przez gracza A gra znajdzie się w jednym z wierzchołków B_1^1, B_2^1 lub B_r^1. Po znalezieniu się gry w sytuacji określonej wierzchołkiem B_1^1, B_2^1 lub B_r^1, obiekt diagnozy powinien dokonać odpowiedzi na podany mu test elementarny y_1, y_2 lub y_i.

Załóżmy, że po pierwszym posunięciu w grze sytuacja znalazła się w wierzchołku B_1^1 (ryc. 45). W sytuacji określonej tym wierzchołkiem obiekt B jako strona gry może zastosować strategię chodową z_1 lub z_2. Zastosowanie przez obiekt B strategii chodowej z_2 oznacza, że obiekt B znajduje się w stanie diagnostycznym $c_1 \in C$, co równoważne jest temu, że w obiektach B uszkodzony jest element x_1. W tym przypadku gra znajdzie się w wierzchołku końcowym oznaczonym symbolem c_1, gdyż w wyniku

wykonania przez obiekt B strategii chodowej z_2, zbiór stanów diagnostycznych $\{c_1, c_2, c_3\}$ przyporządkowanych wierzchołkowi B^1_1 zredukowany został do zbioru jednoelementowego $\{c_1\}$. Gdy stroną diagnostyczną będzie automat diagnostyczny (automat rozgrywający), to po znalezieniu się gry w wierzchołku końcowym, w naszym przypadku oznaczonym symbolem c_1, automat powinien generować sygnał reprezentujący wynik procesu diagnostycznego.

Na ryc. 45 sygnał ten oznaczono symbolem $y(c_1)$. W interpretacji gry wielochodowej sygnały reprezentujące wynik procesu diagnozy, tj. diagnozę, określać będziemy umownie terminem pseudostrategii chodowych automatu. Dla rozpatrywanego przypadku zbiór pseudostrategii chodowych automatu diagnostycznego przedstawiałby się następująco

$$Y_c = \{y(c_1), y(c_2), y(c_3), y(c_0)\}$$

gdzie $y(c_0)$ — negatywny wynik procesu diagnostycznego.

Rozpatrzmy z kolei przypadek, gdy w sytuacji określonej w dendrycie z ryc. 45 wierzchołkiem B^1 obiekt diagnozowany odpowiada strategią chodową z_1 na strategię chodową automatu y_1.

Dla przykładu przyjęto, że strategia chodowa z_1 oznacza, że uszkodzony jest element x_2 lub x_3 obiektu, a więc nie określa ona jednoznacznie aktualnego stanu diagnostycznego. W przypadku więc zastosowania strategii chodowej z_1 zbiór stanów diagnostycznych $\{c_1, c_2, c_3\}$ zredukowany zostanie do zbioru $\{c_2, c_3\}$. Obiekt B swoją strategią chodową z_1 jak gdyby sygnalizuje, że nie znajduje się w stanie diagnostycznym c_3, stąd też stan ten podlega wykreśleniu ze zbioru stanów diagnostycznych.

Sytuacja powstała w grze teraz będzie określona wierzchołkiem A^2_1. W sytuacji A^2_1 strona A gry dokonuje wyboru strategii chodowych przyporządkowanych tej sytuacji.

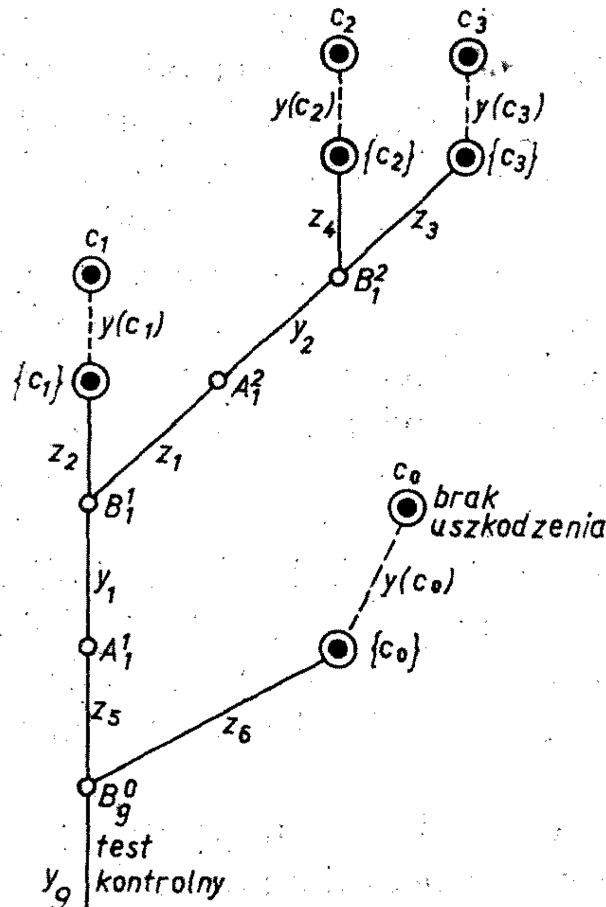
Na ryc. 45 pokazano, że optymalną strategią chodową dla strony A jest w tym przypadku strategia y_2. Zgodnie z tą ryciną odpowiedzią obiektu B na strategię y_2 może być tylko strategia chodowa z_3 lub z_4. Strategia chodowa z_3 wskazuje na stan diagnostyczny c_3, a więc na uszkodzenie elementu x_3 obiektu B, natomiast strategia chodowa z_4 na stan diagnostyczny c_2, a więc na uszkodzenie elementu x_2 tego obiektu. Zastosowanie przez stronę A w sytuacji określonej wierzchołkiem A^2_1 strategii chodowej innej niż y_2, np. y_1 lub y_i, może nie doprowadzić do zlokalizowania uszkodzenia, a w najlepszym przypadku lokalizuje uszkodzenie po większej liczbie posunięć w grze. W podobny do powyższego sposób można by przeanalizować wszystkie pozostałe ścieżki dendrytu przedstawionego na ryc. 45.

Po zbudowaniu dendrytu gry diagnostycznej, opisującej konkretny proces diagnozy, dendryt taki podlega jednostronnej optymalizacji na korzyść automatu diagnostycznego będącego jedną ze stron gry. Jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry diagnostycznej jest graficzną postacią algorytmu optymalnego postępowania automatu w procesie diagnostycznym dotyczącym danego obiektu diagnozowanego. Oczywiste jest, że jednostronnie zoptymalizowanym dendrytem gry diagnostycznej można się posłużyć również przy lokalizacji źródła niesprawności w badanym obiekcie, nie korzystając z pomocy automatu rozgrywającego.

Dla przykładu na ryc. 46 został przedstawiony jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry diagno-

stycznej, powstały w wyniku jednostronnej optymalizacji dendrytu z ryc. 45.

W ogólnym przypadku gra wielochodowa opisująca proces diagnostyczny jest grą parametryczną.



Ryc. 46

Wynika to z tego, że obiekt diagnozowany najczęściej dzieli się na pewne części składowe, z których każda charakteryzuje się swoistą strukturą i spełnia inną funkcję w obiekcie (systemie). Dla każdej z takich części składowych obiektu diagnozowanego należy określić dendryt gry diagnostycznej, a następnie go zoptymalizować. Uzyskamy w ten sposób jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry diagnostycznej składający się z całej rodziny dendrytów składowych, z których każdy dotyczy

procesu diagnostycznego innej części składowej danego obiektu. Z kolei każdemu pojedynczemu dendrytowi przyporządkowuje się oddzielny parametr p_i wyróżniający go w rodzinie dendrytów.

Następnie, w celu uzyskania najbardziej zminimalizowanej struktury dendrytu opisującego proces diagnostyczny dla całego obiektu diagnozowanego, dendryty składowe odpowiednio nakłada się na na siebie (por. rozdział 3, podrozdział „Gry wielochodowe parametryczne"). Wynikiem końcowym takiej operacji jest zminimalizowany dendryt gry diagnostycznej o jednym wierzchołku początkowym, który w zależności od parametru p_i reprezentuje ten lub inny dendryt składowy. Zminimalizowany dendryt gry diagnostycznej jest grafem automatu rozgrywającego (diagnostycznego) i umożliwia przeprowadzenie syntezy tego automatu. Automatem diagnostycznym może być również komputer mający program diagnostyczny opracowany na podstawie zminimalizowanego dendrytu gry diagnostycznej.

9

Automatyzacja procesów decyzyjnych w ujęciu gry wielochodowej

Wobec obserwowanego od kilku lat ciągłego i burzliwego rozwoju techniki obliczeniowej, szczególnej wagi nabiera problem wykorzystania systemów cyfrowych w procesach kierowania. Dotyczy to zarówno problemu kierowania działalnością pojedynczego przedsiębiorstwa przemysłowego, jak też kierowania złożonym układem ekonomicznym, takim jak kombinat, gałąź przemysłu, gospodarka narodowa itp. W ogólnym przypadku proces kierowania układem ekonomicznym jest procesem wieloetapowym, co wynika z charakteru funkcjonowania układu ekonomicznego jako układu z zachowaniem celowym. Kierowanie wieloetapowym procesem funkcjonowania danego układu uwarunkowane jest koniecznością wypracowywania zarówno decyzji etapowych, jak i tzw. makrodecyzji, obejmujących kilka etapów wraz z kontrolą realizacji tych decyzji. Z kolei informacja o przebiegu realizacji decyzji przez przedmiot kierowania wskazuje na konieczność modyfikowania realizowanych już decyzji przez nakładanie na nie tzw. mikrodecyzji. Kierowanie jest więc złożonym wieloetapowym procesem decyzyjnym o charakterze dynamicznym. Jakość tego kierowania zależy od stopnia optymalności podejmowanych decyzji. Przy uwzględnieniu różnorodnych czynników rzutujących na funkcjonowanie układu ekonomicznego,

wybór jakiejkolwiek optymalnej decyzji do kierowania takim układem może być przeprowadzony tylko przy pomocy systemu cyfrowego (komputera). Jednak nawet najbardziej nowoczesny pod względem technicznym system cyfrowy będzie bezużyteczny w procesie wypracowywania optymalnych decyzji, jeżeli nie określi się algorytmu jego działania w procesie kierowania danym układem ekonomicznym. Stąd też wynika konieczność określenia takiego modelu systemu przetwarzającego informacje w wieloetapowym procesie decyzyjnym, który będąc algorytmem działania systemu cyfrowego — traktowanego pierwotnie jako zbiór urządzeń cyfrowych — rzutowałby jednocześnie na architekturę systemu cyfrowego.

Zagadnienie to, dotychczas nie rozpracowane, wysuwa się na pierwszy plan w problematyce związanej z kierowaniem gospodarką narodową. Uzasadnione są więc prace dążące do jego rozwiązania.

Jedna z możliwych do przyjęcia koncepcji rozwiązania tego problemu opiera się na syntezie gry wielochodowej opisującej proces decyzyjny.

W celu uogólnienia problemu kierowania układem z zachowaniem celowym przy pomocy systemu cyfrowego, załóżmy, że proces kierowania dotyczy pewnego układu abstrakcyjnego Q, którego szczególnym przypadkiem jest układ ekonomiczny. Układ Q jest zbiorem pewnych obiektów będących składnikami układu.

Zbiór ten ma postać

$$Q = \{X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_m\} \qquad (9.1)$$

gdzie X_i — i-ty obiekt układu Q.

Gdy układ Q jest układem ekonomicznym, wówczas obiektami $X_i \in Q$ są zakłady wytwórcze bądź

też jednostki spełniające rolę pomocniczą, jednakże niezbędną dla należytego funkcjonowania układu. Każdy z obiektów $X_i \in Q$ stanowi źródło przyporządkowanej mu informacji i jest odbiornikiem decyzji wypracowanej przez system cyfrowy.

Układ Q zgodnie ze swym przeznaczeniem realizuje pewne przedsięwzięcie według określonego z góry kryterium efektywności. Aktualny stan układu określają parametry, przynależne do pewnych dziedzin rzutujących na funkcjonowanie układu. Każda dziedzina z osobna określa pewną klasę przedsięwzięć lub klasę środków potrzebnych do funkcjonowania układu lub też klasę innych czynników mających wpływ na funkcjonowanie układu. Dla układu ekonomicznego dziedziną może być produkcja, transport, zaopatrzenie itp.

Dziedziny tworzą zbiór

$$\Gamma = \{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \ldots, \tilde{P}\} \tag{9.2}$$

Informacje o stanie układu Q w poszczególnych dziedzinach wchodzących w skład zbioru Γ jednoznacznie określa kompletny stan układu Q.

Ponieważ zgodnie z wyrażeniem (9.1) układ Q jest zbiorem obiektów, każdy obiekt X_i posiada przyporządkowany mu zbiór dziedzin, w zakresie których funkcjonuje. Zbiór ten ma postać

$$\Gamma_i = \{\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \ldots, \tilde{M}_i, \tilde{N}_i\} \tag{9.3}$$

przy czym elementy tego zbioru jako dziedziny wchodzą w zakres odpowiednich dziedzin zbioru Γ. Stąd też dowolna dziedzina zbioru Γ jest jednocześnie sama zbiorem dziedzin przyporządkowanych poszczególnym obiektom $X_i \in Q$. Na przykład dziedzina $\tilde{A}$ zbioru Γ określa zbiór o postaci

$$\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_i, \ldots, \tilde{A}_m\} \tag{9.4}$$

Z kolei każda dziedzina $\tilde{A}_i \in \tilde{A}$ jest zbiorem możliwych stanów danego obiektu X_i w dziedzinie $\tilde{A}_i$. Informacja o stanie danego obiektu X_i we wszystkich przyporządkowanych mu dziedzinach będących elementami zbioru Γ_i jednoznacznie określa kompletny stan obiektu X_i w danej dyskretnej chwili. Natomiast informacja o stanie wszystkich jednostek X_i (dla $i = 1, 2 ..., m$) w jednej i tej samej dziedzinie, np. $\tilde{A}$, jednoznacznie określa stan układu Q w tej dziedzinie.

Stan ten zadany jest wektorem o postaci

$$a = [a_{1,j1}, a_{2,j2}, ..., a_{i,ji}, ..., a_{m,jm}] \qquad (9.5)$$

gdzie $a_{i,ji}$ — aktualny stan obiektu X_i w dziedzinie $\tilde{A}_i$.

Znając również aktualny stan układu Q w pozostałych dziedzinach zbioru można określić kompletny stan układu Q. Stan ten zadany jest wektorem

$$z = [a, b, c, ..., p] \qquad (9,6)$$

Współrzędnymi tego wektora są wektory o postaci zadanej wyrażeniem (9.5).

Na podstawie informacji o aktualnym stanie układu Q, system cyfrowy — kierujący optymalnym działaniem układu Q — powinien wypracować odpowiednią decyzję. Decyzja ta ma postać wektora

$$y = [y_a, y_b, y_c, ..., y_p] \qquad (9.7)$$

Współrzędne wektora y są decyzjami do sterowania układem Q w zakresie poszczególnych dziedzin. Ponieważ układ Q jest układem z zachowaniem celowym i działa w funkcji czasu, decyzja co do kierowania układem Q nie może być wypracowana bezpośrednio tylko na podstawie informacji o aktualnym stanie układu. Przy wypracowywaniu opty-

malnej decyzji na podstawie informacji $z = z(t_j)$ charakteryzującej stan układu Q w danej chwili t_j musi być uwzględniona również sekwencja stanów układu i decyzji wypracowanych przez system cyfrowy w poprzednich dyskretnych chwilach

$$t_{j-1}, t_{j-2}, \ldots, t_2, t_1$$

oczywiście przy założeniu, że znany jest algorytm reakcji systemu cyfrowego na stany układu Q w następnych chwilach

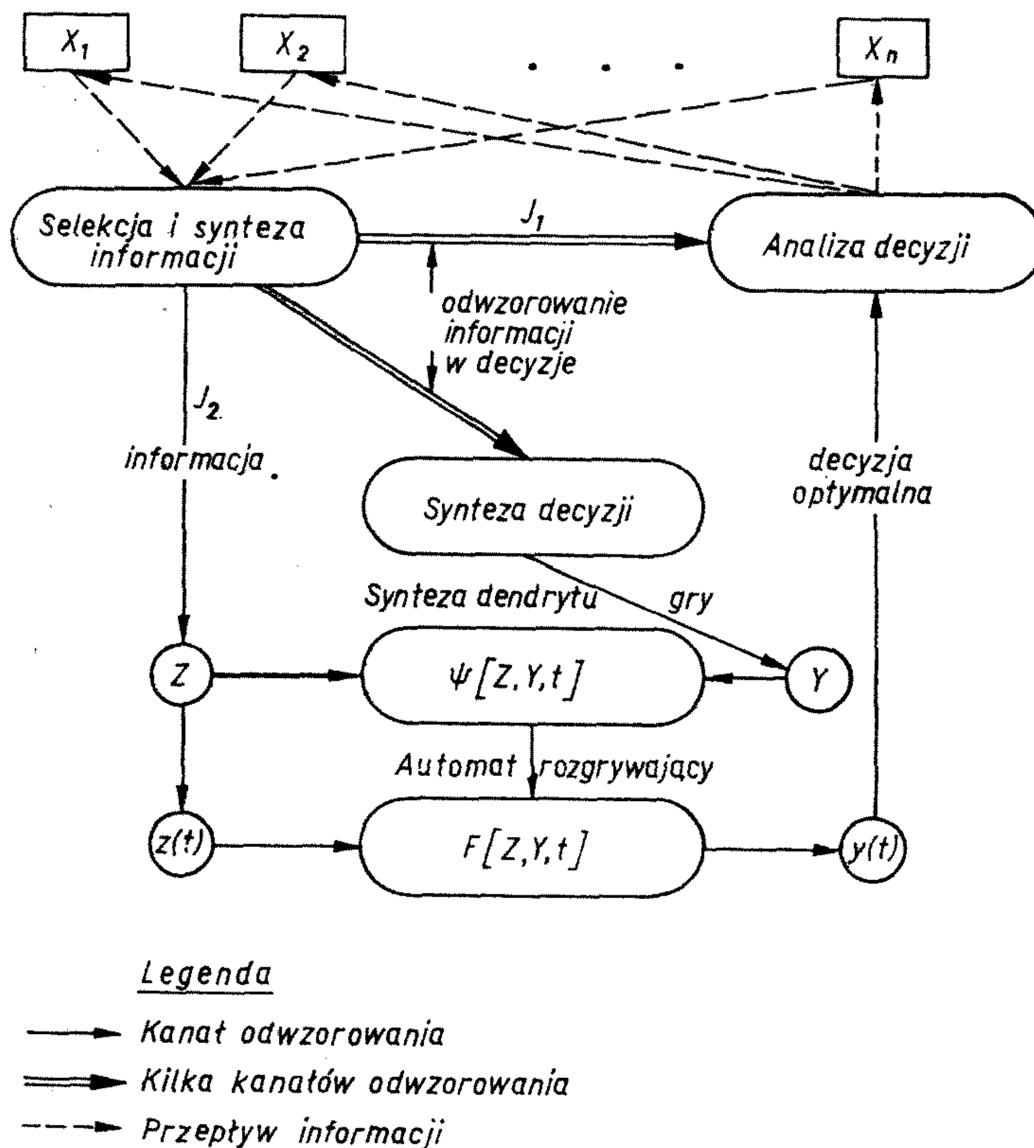
$$t_{j+1}, t_{j+2}, \ldots$$

Wnioski wynikające z przeprowadzonej powyżej analizy rzutują na złożoność systemu przetwarzającego, odwzorowującego sposób funkcjonowania systemu cyfrowego w dyskretnym, wieloetapowym procesie przetwarzania informacji i wypracowywania decyzji dla kierowania układem Q.

Z punktu widzenia obiegu informacji, przetwarzania informacji i wypracowywania decyzji, system przetwarzający informację można traktować jako przestrzeń zbiorów, której elementami są zbiory informacji, zbiory decyzji oraz zbiór algorytmów odwzorowań między zbiorami. Z tych też względów wydaje się celowe przyjęcie dla tego systemu grafów skierowanych jako języka strukturalnego, ponieważ graf skierowany najlepiej uwidacznia właściwości funkcjonalne systemu przetwarzającego informację, jak również ułatwia jego syntezę.

Podstawowe funkcje systemu cyfrowego, wypracowującego optymalne decyzje w wieloetapowym procesie decyzyjnym, można wyjaśnić na podstawie schematu funkcjonalnego odpowiadającego mu systemu przetwarzającego informację (ryc. 47). Źródłami informacji dla systemu cyfrowego są obiekty X_i wchodzące w skład danego układu Q będącego

przedmiotem kierowania. Informacja wchodząca do systemu cyfrowego charakteryzuje stan obiektów $X_i \in Q$ w poszczególnych dziedzinach funkcjonowania tych obiektów. Ze względu na rodzaje decyzji wy-



Ryc. 47

stępujących w procesie kierowania układem Q, informacja napływająca do systemu cyfrowego podlega selekcji sprowadzającej się do podziału tej informacji na dwa typy, tj. J_1, J_2.

Na podstawie informacji typu J_1 wypracowana jest decyzja co do kierowania układem Q bez uwzględ-

nienia funkcji czasu. Natomiast informacja typu J_2 rzutuje na wypracowanie decyzji do kierowania układem Q z uzwzględnieniem funkcji czasu. Wypracowana przez system cyfrowy decyzja $y = f(J_1)$, tj. na podstawie informacji J_1, podlega w systemie analizie, której wynikiem są decyzje do kierowania obiektami X_i w zakresie poszczególnych dziedzin.

Bardziej złożonemu procesowi przetwarzania podlega informacja typu J_2, gdyż na niej opiera się cały wieloetapowy proces decyzyjny. Złożoność tego przetwarzania jest uwarunkowana koniecznością przeprowadzenia w systemie cyfrowym zarówno syntezy informacji kompletnej, jak również syntezy decyzji (por. ryc. 47).

Celem syntezy informacji jest określenie ogólnego stanu układu Q we wszystkich dziedzinach jego funkcjonowania. Informacja charakteryzująca ten stan jest wektorem o postaci wyrażenia (9.6) i kompletuje zbiór Z możliwych stanów układu Q. Zbiór Z jest określony następującą postacią

$$Z = \{z_1, z_2, ..., z_j, ..., z_s\} \qquad (9.8)$$

Jednocześnie z syntezą informacji następuje synteza decyzji. Polega ona na tym, że te elementy informacji typu J_2, które są wykorzystywane do określenia ogólnego stanu układu Q, odwzorowywane są również w odpowiadające im decyzje. Decyzje te kompletują odpowiednie zbiory decyzji, a następnie podlegają procesowi syntezy na decyzje etapowe. Decyzje etapowe są określone postacią wyrażenia (9.7) i kompletowane w zbiorze

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_j, ..., y_w\} \qquad (9.9)$$

W zasadzie zarówno zbiór Y, jak i zbiór Z kompletowane są w okresie wstępnego uruchomienia

systemu cyfrowego symulującego możliwe warianty działania układu Q. Po tym wstępnym okresie w zbiorze Y powinny się znaleźć „prawie" wszystkie możliwe decyzje etapowe do kierowania układem Q na podstawie informacji o aktualnym stanie tego układu.

Jednocześnie z procesem kompletowania zbiorów Z i Y zostają określone relacje między elementami obydwóch zbiorów. Znając zbiory Z i Y, relacje między elementami tych zbiorów oraz kryterium efektywności funkcjonowania układem Q można określić model matematyczny kierowania układem Q. Ze względu na wieloetapowy proces decyzyjny, warunkujący funkcjonowanie układu Q, celowe się staje wyrażenie tego modelu postacią dwuosobowej gry wielochodowej.

Stroną *I* tej gry jest układ Q funkcjonujący w zbiorze przyporządkowanych mu dziedzin, natomiast stroną *II* tej gry jest system cyfrowy wypracowujący optymalne decyzje etapowe.

Układ Q jako jedna strona ze stron gry jest generatorem informacji dla systemu cyfrowego, na podstawie której jest określony kompletny stan układu Q. Ponieważ dowolny, kompletny stan układu Q określa się jednoznacznie na podstawie informacji o stanie układu w poszczególnych dziedzinach zawierających również elementy o charakterze losowym, stronę *I* gry można potraktować w pewnym sensie jako naturę. Z kolei, uwzględniając zdeterminowany charakter działania systemu cyfrowego, stronę *II* gry należy potraktować jako rozumnego gracza. Wartością gry dla przyjętego modelu jest pewien współczynnik k określający stopień optymalności stanu układu Q. Biorąc pod uwagę wszystkie czynniki losowe mające wpływ na działanie układu Q, można założyć najbardziej niekorzystny wariant

tego działania, a mianowicie, że układ Q, jako strona gry, dąży do minimalizacji wartości współczynnika k. W świetle takiego założenia, uwarunkowanego antagonistycznym charakterem gry, system cyfrowy jako strona *II* gry będzie dążył do maksymalizowania wartości współczynnika k.

W grze wielochodowej każda ze stron gry dysponuje zbiorem przyporządkowanych jej strategii chodowych. Dla strony *I* gry zbiorem strategii chodowych jest zbiór Z, który z punktu widzenia teorii gier można nazwać zbiorem pseudodecyzji układu Q. Natomiast dla strony *II* gry zbiorem strategii chodowych jest zbiór Y, zawierający możliwe decyzje etapowe do kierowania układem Q. Graficzną postacią gry wielochodowej jest dendryt gry, który w rozpatrywanym przypadku jest jednocześnie graficznym obrazem wieloetapowego procesu decyzyjnego. Otrzymanie dendrytu gry związane jest z koniecznością zastosowania i realizacji algorytmu syntezy dendrytu na podstawie danych o zbiorach Z i Y, znajomości relacji między elementami tych zbiorów oraz zadanego kryterium efektywności. Na ryc. 47, przedstawiającej m.in. uproszczony graf matematycznego modelu wypracowania optymalnych decyzji etapowych, dendryt gry wielochodowej jest opisany funkcją $\Psi(Z, Y, t)$. Dendryt $\Psi(Z, Y, t)$ nie jest jeszcze algorytmem wypracowania przez system cyfrowy optymalnych decyzji etapowych do kierowania układem Q. Dlatego też, aby uzyskać możliwość wypracowania tych decyzji przez system cyfrowy, należy przeprowadzić jednostronną optymalizację dendrytu gry. Jednostronną optymalizację dendrytu gry przeprowadza się na korzyść jednej ze stron gry, a w interesującym nas przypadku na korzyść strony *II* gry, tj. systemu cyfrowego.

Jak wiadomo, cechą charakterystyczną jedno-

stronnie zoptymalizowanego dendrytu jest to, że przedstawia on taki rodzaj gry, w której jeden z graczy ma z góry narzucone optymalne strategie swego postępowania. Stąd też, przy realizacji gry według jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu, system cyfrowy jako *II* strona gry nie dokonuje w dowolnej sytuacji wyboru strategii chodowej w zbiorze możliwych strategii chodowych przyporządkowanych tej sytuacji, gdyż dysponuje tylko jedną, optymalną dla tej sytuacji strategią chodową. Przekształcenie dendrytu $\Psi(Z, Y, t)$ na dendryt jednostronnie zoptymalizowany, opisany funkcją $\Phi(Z, Y, t)$, realizuje się według ściśle określonego algorytmu. Celem otrzymania jak najbardziej zwięzłego modelu matematycznego wypracowania optymalnych decyzji etapowych, jednostronnie zoptymalizowany dendryt gry podlega minimalizacji.

Minimalizacja ta sprowadza się do zmniejszenia rozmiarów dendrytu przez wzajemne pokrycie się izomorficznych względem siebie części składowych jednostronnie zoptymalizowanego dendrytu gry. Zminimalizowany dendryt gry, oznaczony na ryc. 47 funkcją $F(Z, Y, t)$, opisuje jednoznacznie strukturę automatu rozgrywającego, który wypracowuje optymalną decyzję dla sterowania układem Q na podstawie aktualnej informacji o stanie układu w danej chwili t. Tego typu automat może zostać zmodelowany za pomocą programu na maszynie cyfrowej o strukturze uniwersalnej lub też może wystąpić w systemie cyfrowym jako maszyna cyfrowa wyspecjalizowana.

Wypracowana przez automat rozgrywający $F(Z, Y, t)$ optymalna decyzja etapowa do kierowania układem Q podlega analizie, której wynikiem są optymalne decyzje etapowe dla poszczególnych obiektów $X_i \in Q$. Scharakteryzowany wyżej model

abstrakcyjny systemu przetwarzającego informację jest pewną wizją właściwego wykorzystania maszyn cyfrowych w złożonych, wieloetapowych procesach kierowania. Model ten jednoznacznie określa funkcjonowanie systemu cyfrowego w wieloetapowym procesie decyzyjnym, jak również rzutuje na architekturę tegoż systemu. Dokładne określenie konfiguracji elementów systemu cyfrowego zależy od znajomości struktury układu Q oraz od przyporządkowania elementom abstrakcyjnym, występującym w przedstawionym systemie przetwarzającym, odpowiednich wielkości rzeczywistych.

Należy sądzić, że w perspektywie rozwoju cybernetyki tego typu systemy będą odgrywać rolę dominującą.

Zakończenie

Niniejsza książka nie obejmuje wszystkich problemów z zakresu cybernetyki, dających się opisać modelem matematycznym dwuosobowej gry wielochodowej. Przydatność aparatu formalnego gier wielochodowych do opisu tych problemów została zilustrowana tylko na trzech przykładach, mających niewątpliwie duże znaczenie praktyczne.

Mianowicie, w aspekcie dwuosobowej gry wielochodowej rozpatrzono problem samosterowalności obiektu w przestrzeni, problem diagnostyki systemu oraz zagadnienie wypracowania optymalnych decyzji przez system cyfrowy kierujący układem z zachowaniem celowym.

Dwa ostatnie problemy w zasadzie zostały tylko zasygnalizowane, z jednej strony ze względu na ograniczoną objętość książki, a z drugiej w celu uniknięcia nadmiernego przeładowania matematyką jej treści. Z wielu przemilczanych w książce problemów, dających się sprowadzić do postaci formalnej gry wielochodowej, na szczególną uwagę zasługuje modelowanie procesów śledczych w sądownictwie oraz budowa modeli cybernetycznych wchodzących w zakres ekologii i bioniki. Najbardziej jednak użyteczne i najogólniejsze zastoso-

wanie aparatu formalnego gier wielochodowych wiąże się z opisem wieloetapowych procesów decyzyjnych, zachodzących w systemach z zachowaniem celowym. Wykorzystanie aparatu formalnego gier wielochodowych do opisu procesów decyzyjnych występujących w procesie kierowania złożonymi układami ekonomicznymi, a nawet pewnymi gałęziami gospodarki narodowej, podwyższy w dużym stopniu optymalność podejmowanych decyzji. Oczywiście kierowanie takie łączy się z wykorzystaniem komputerów.

Aby jednak najracjonalniej wykorzystać komputery w systemie automatycznego kierowania lub zarządzania, należy znać algorytm działania tego systemu. Algorytm taki można opracować korzystając z aparatu formalnego gier wielochodowych (por. rozdział 9). Stąd jak najbardziej jest uzasadniona kontynuacja badań naukowych w kierunku praktycznego wykorzystania aparatu formalnego gier wielochodowych do opisu wieloetapowych procesów decyzyjnych.

Literatura

Ashby W. R., *Wstęp do cybernetyki.* PWN, Warszawa 1963.
Bromirski J., *Teoria automatów.* WNT, Warszawa 1969.
Bromirski J., Kazimierczak J., Kosmulska E., *Systemy cyfrowe i ich struktura.* „Maszyny Matematyczne", 12 (1970).
Feigenbaum E. A., Feldman J., *Maszyny matematyczne i myślenie.* PWN, Warszawa 1972.
Kazimierczak J., *Szachy — problem cybernetyczny.* „Problemy", 9 (1970).
Kazimierczak J., *Obiekt w przestrzeni i cybernetyka.* „Technika Lotnicza i Astronautyczna", 7 i 8 (1971).
Kazimierczak J., *Metoda syntezy strukturalnej automatów rozgrywających.* „Prace Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej — Studia i Materiały", 6 (1972).
Kofler E., *Wstęp do teorii gier.* PZWS, Warszawa 1963.
Lerner A. J., *Zarys cybernetyki.* WNT, Warszawa 1971.
Luce R. D., Raiffa H., *Gry i decyzje.* PWN, Warszawa 1964.
Pospiełow D. A., *Gry i automaty.* WNT, Warszawa 1969.
Tiepłow L., *O cybernetyce.* WNT, Warszawa 1967.
Wencel J. S., *Elementy teorii gier.* PWN, Warszawa 1961.
Williams J. D., *Strateg doskonały — wprowadzenie do teorii gier.* PWN, Warszawa 1965.
Wiener N., *Cybernetyka czyli sterowanie komunikacja w zwierzęciu i maszynie.* PWN, Warszawa 1971.

Nakładem Wydawnictwa Wiedza Powszechna ukazały się

MAŁY SŁOWNIK CYBERNETYCZNY

PRACA ZBIOROWA POD RED. M. KEMPISTY

Pierwszy polski słownik podstawowych pojęć i terminów z zakresu cybernetyki i nauk pokrewnych, np. matematyki, logiki, psychologii itp. Słownik zawiera także dane biograficzne dotyczące wybitnych badaczy polskich i zagranicznych. Liczne ilustracje ułatwiają zrozumienie pojęć cybernetycznych. Słownik może być przydatny zarówno dla specjalistów, jak i dla wszystkich interesujących się cybernetyką.

CO TO JEST CYBERNETYKA

GEORG KLAUS, HEINZ LIEBSCHER

Cybernetyka zdobyła w świecie ustaloną pozycję, jej znaczenie stale rośnie, a mimo to znajduje się w początkowym okresie swego rozwoju.

W książce autorzy — Georg Klaus, wybitny filozof i cybernetyk niemiecki i jego bliski współpracownik Heinz Liebscher, starali się zapoznać czytelnika z podstawowymi pojęciami cybernetyki ukazując jej metody badawcze i obiekty, na których cybernetycy przeprowadzają doświadczenia. Duże partie materiału poświęcone są zagadnieniom modelowania cybernetycznego, uczenia się, automatyzacji i planowania.

Autorzy nie poprzestali tylko na rozważaniach teoretycznych, ale przedstawili też możliwości praktycznego zastosowania niektórych osiągnięć cybernetyki — przede wszystkim w zakresie planowania gospodarczego.

„OMEGA" 1973

Ukazały się:

238. A. S. Kompaniejec *Prawa fizyki statycznej*
239. C. Podgórski *Lenino*
240. T. Kielanowski *Rozmyślania o przemijaniu*
241. H. Chołaj *Budowa socjalizmu na wsi a polityka rolna*
242. E. Ciupak *Katolicyzm ludowy w Polsce*
243. L. Stolarczyk, U. Stolarczyk *Wolne rodniki*
244. J. Goryński *Mieszkanie wczoraj, dziś i jutro*
245. Z. Wieczorek *Neopsychoanaliza i marksizm*
246. W. Sedlak *U źródeł nowej nauki. Paleobiochemia*
247. M. Czerwiński *Magia, mit i fikcja*
248. K. Kuratowski *Pół wieku matematyki polskiej 1920—1970*
249. J. Tazbir *Rzeczpospolita szlachecka wobec wielkich odkryć*
250. A. Urbanek *Rewolucja naukowa w biologii*
223. B. Suchodolski *Komisja Edukacji Narodowej.* Wyd. II

W przygotowaniu:

W. W. Sawyer *W poszukiwaniu modelu matematycznego*
A. Wyczański *Polska w Europie XVI stulecia*
E. Leach *Lévi-Strauss*

